

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**ΙΔ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2013**

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013



**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ &
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

www.cms.org.cy

**ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH**

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2013**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΕΚΔΟΣΗ**



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

ΙΔ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 21/04/2013

ΔΟΚΙΜΙΟ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Σωστή συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

Λανθασμένη συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. Η παράσταση

$$[(x + 1)^2 - (x + 2)^2 + (x + 3)^2] - [(x^2 + 1) - (x^2 + 2^2) + (x^2 + 3^2)] \text{ είναι ίση με}$$

A. $12x$

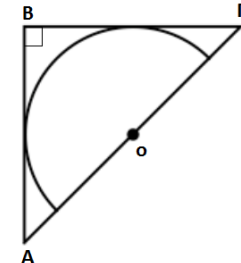
B. $6x$

Γ. $4x$

Δ. $2x$

Ε. 0

2. Ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ περικλείει ένα ημικύκλιο του οποίου το εμβαδόν είναι 8π . Ο κύκλος έχει το κέντρο του O πάνω στην υποτίνουσα $A\Gamma$ και εφάπτεται με τις πλευρές AB και $B\Gamma$. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με



A. 10π

B. 16

Γ. 12π

Δ. 64

Ε. 32

3. Ένας διψήφιος αριθμός $\overline{αβ}$ θα ονομάζεται «καλός» αν $α^2 + β^2 = 85$. Πόσοι «διψήφιοι «καλοί» αριθμοί υπάρχουν

A. 5

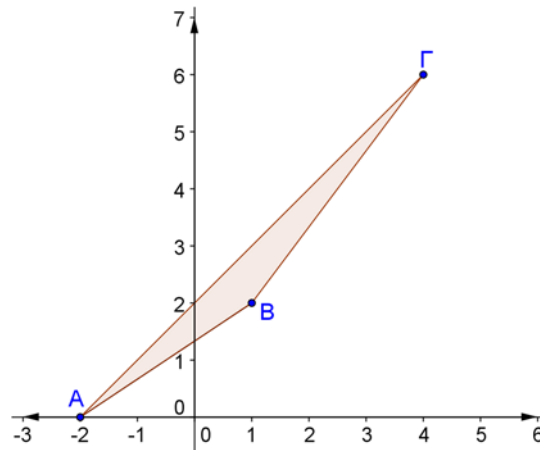
B. 4

Γ. 3

Δ. 2

Ε. 0

4. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(4,6)$. Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι



A. 2

B. 2,5

Γ. 3

Δ. 3,5

Ε. 4

5. Πόσοι διψήφιοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν που έχουν και τα δύο τους ψηφία πρώτους αριθμούς.

A. 89

B. 23

Γ. 5

Δ. 37

Ε. 4

6. Ποιο είναι το ψηφίο των μονάδων του αριθμού $6^{89} - 7^{20}$;

A. 1

B. 3

Γ. 5

Δ. 7

Ε. 9

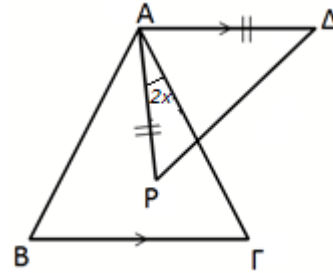
7. Αν $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ όπου $\alpha, \beta, \epsilon \mathbb{R}$, η παράσταση $\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta$ είναι ίση με

- A. $\frac{33}{64}$ B. $\frac{1}{8}$ Γ. $-\frac{3}{8}$ Δ. $\frac{5}{16}$ Ε. $-\frac{11}{16}$

8. Αν $9^x = 2$ και $4^y = 9$ τότε το xy είναι ίσο με

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. 2 Ε. 36

9. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $AP\Delta$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AP$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$. Αν $\widehat{P\hat{A}\Gamma} = 2x^\circ$, τότε η τιμή της γωνίας $\widehat{A\Delta P}$ είναι ίση με:



- A. $60^\circ + x^\circ$ B. $180^\circ + 3x^\circ$ Γ. $120^\circ - x^\circ$ Δ. $2x^\circ$ Ε. $60^\circ - x^\circ$

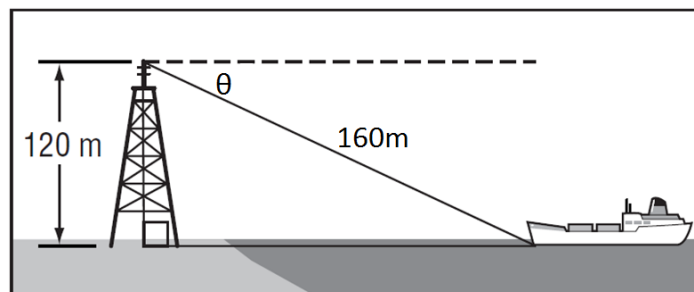
10. Το πρώτο ψηφίο του αριθμού $2^{37} \cdot 5^{31}$ είναι

- A. 6 B. 4 Γ. 2 Δ. 0 Ε. 1

11. Λόγω χαμηλής προσέλευσης οπαδών σε αγώνες ποδοσφαίρου, αποφασίστηκε να μειωθεί η τιμή του εισιτηρίου κατά 30%. Στο επόμενο παιχνίδι ο αριθμός των εισιτηρίων αυξήθηκε κατά 30%. Σε σύγκριση με τον προηγούμενο αγώνα, τα έσοδα από την πώληση των εισιτηρίων είχαν

- A. Αύξηση 30%. B. Μείωση 30% Γ. Αύξηση 9% Δ. Μείωση 9% Ε. Παραμένουν τα ίδια

12. Στο πιο κάτω σχήμα να συνημίτονο της γωνίας θ είναι ίσο με



- A. $\frac{120}{160}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ Γ. $\frac{4}{3}$ Δ. $\frac{3}{5}$ Ε. 30°

13. Αν $17x + 51y = 102$ τότε το $9x + 27y$ είναι ίσο με

- A. 36 B. 34 Γ. 54 Δ. 18 Ε. δεν υπολογίζεται

14. Στην ακολουθία $\dots κ, λ, μ, ν, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται αριστερά του. Ο αριθμός $κ$ είναι ίσος με

- A. 0 B. 2 Γ. -2 Δ. 3 Ε. -3

15. Ο αριθμός $χ$ ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$. Πόσοι από τους αριθμούς $x^3 - 2x^2$ είναι τέλεια τετράγωνα .

- A. 6 B. 4 Γ. 7 Δ. 49 Ε. κανένα από τα προηγούμενα

16. Για πόσες ακέραιες τιμές του N ο αριθμός $\frac{N+3}{N-1}$ είναι ακέραιος.

- A. 2 B. 4 Γ. 6 Δ. 8 Ε. 0

17. Η τιμή του $2013^2 - 2012 \cdot 2014$ είναι ίση με

- A. 2013 B. -2 Γ. 2 Δ. 11 Ε. 1

18. Αν $f(x) = 3x - 1$ και $g(a, \beta) = a^2 - \beta$ τότε $g(6, f(6))$ είναι ίσο με

- A. 0 B. 30 Γ. 36 Δ. 15 Ε. 19

19. Αν $(\alpha * \beta) = (\alpha + \beta)^{\alpha - \beta}$ τότε $(8 * (4 * (2 * 1)))$ είναι ίσο με

- A. 64 B. 32 Γ. 8 Δ. 16 Ε. 15

20. Όλες οι πλευρές ενός ξύλινου κύβου με ακμή 5cm βάφονται. Στην συνέχεια ο κύβος κόβεται σε 125 ίσους κύβους ακμής 1cm. Πόσοι από τους κύβους με ακμή 1cm δεν έχουν καθόλου μπογιά.

- A. 27 B. 64 Γ. 25 Δ. 100 Ε. 0

21. Η τιμή του γινομένου

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{59}\right)$$

A. 118

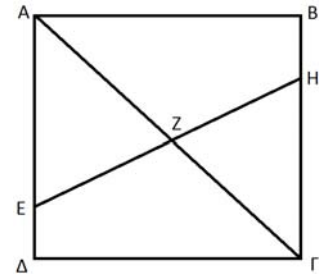
B. 60

Γ. 59

Δ. 20

Ε. $\frac{1}{118}$

22. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με την $\widehat{AZH} = 120^\circ$.
Να βρείτε την γωνία AEZ .



A. 45°

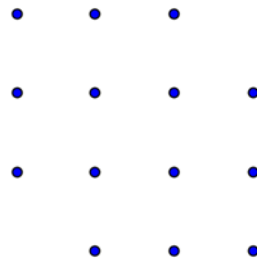
B. 80°

Γ. 60°

Δ. 50°

Ε. 75°

23. Πόσα τετράγωνα σχηματίζονται χρησιμοποιώντας 4 από τις τελείες σαν κορυφές τους;



A. 13

B. 12

Γ. 11

Δ. 10

Ε. 9

24. Ένα αυτοκίνητο έχει 6 θέσεις, 2 στα μπροστινά καθίσματα και 4 στα πίσω καθίσματα.
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν στο αυτοκίνητο τα μέλη μιας
6-μελους οικογένειας αν οι γονείς θα καθίσουν στα μπροστινά καθίσματα

A. 4

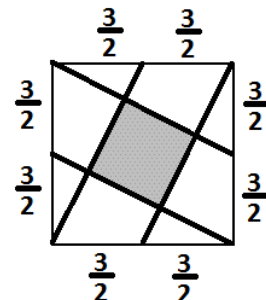
B. 6

Γ. 24

Δ. 36

Ε. 48

25. Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι



A. 1

B. $\frac{9}{4}$

Γ. $\frac{9}{20}$

Δ. $\frac{9}{5}$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

**CYPRUS
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
2013**

ENGLISH VERSION



CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY

36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos

Nicosia, Cyprus

Tel. 22378101, Fax: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Website: www.cms.org.cy

14th CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 21/04/2013

EXAMS PAPER

9th Grade – C' Gymnasium

10th Grade - A' Lyceum

TIME: 60 minutes

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct**

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

and these are **incorrect**

1. (A) (B) (C) (D) (E)

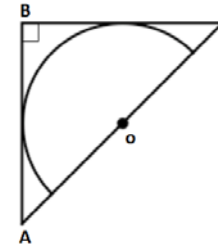
1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. The expression $[(x + 1)^2 - (x + 2)^2 + (x + 3)^2] - [(x^2 + 1) - (x^2 + 2^2) + (x^2 + 3^2)]$ is equal to

A. $12x$ B. $6x$ Γ. $4x$ Δ. $2x$ E. 0

2. An isosceles right triangle $AB\Gamma$ encloses a semicircle of area 8π . The circle has its center O on hypotenuse $A\Gamma$ and is tangent to the sides AB and $B\Gamma$. The area of the triangle $AB\Gamma$ is equal to

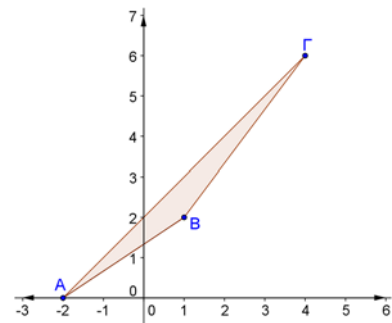


A. 10π B. 16 Γ. 12π Δ. 64 E. 32

3. A two-digit number $\overline{\alpha\beta}$ is called "good" if $\alpha^2 + \beta^2 = 85$. How many "good" numbers are there?

A. 5 B. 4 Γ. 3 Δ. 2 E. 0

4. Points $A(-2,0)$, $B(1,2)$ and $\Gamma(4,6)$ are given. The area of the shaded region is:



A. 2 B. $2,5$ Γ. 3 Δ. $3,5$ E. 4

5. How many 2-digit prime numbers are there, which have both of their digits as prime numbers.

A. 89 B. 23 Γ. 5 Δ. 37 E. 4

6. What is the units' digit of the number $6^{89} - 7^{20}$?

A. 1 B. 3 Γ. 5 Δ. 7 E. 9

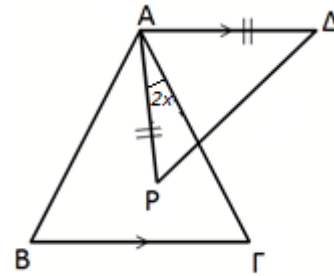
7. If $a + \beta = \frac{1}{2}$ and $a^2 + \beta^2 = 1$, where $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$, show that $\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta$ is equal to

A. $\frac{33}{64}$ B. $\frac{1}{8}$ Γ. $-\frac{3}{8}$ Δ. $\frac{5}{16}$ E. $-\frac{11}{16}$

8. If $9^x = 2$ and $4^y = 9$ then xy is equal to :

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. 2 E. 36

9. In the figure, triangle ABΓ is equilateral. Triangle APΔ is isosceles with $AΔ = AP$ and $AΔ \parallel BΓ$. If $\widehat{P\hat{A}\Gamma} = 2x^\circ$ then the measure of the angle $\widehat{A\hat{D}P}$ is:



- A. $60^\circ + x^\circ$ B. $180^\circ + 3x^\circ$ Γ. $120^\circ - x^\circ$ Δ. $2x^\circ$ E. $60^\circ - x^\circ$

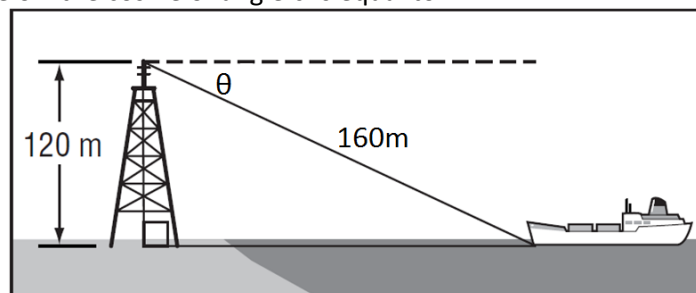
10. The first digit of the number $2^{37} \cdot 5^{31}$ is:

- A. 6 B. 4 Γ. 2 Δ. 0 E. 1

11. As a result of poor attendance at soccer matches it was decided to decrease the ticket price by 30%. At the next match the number of tickets sold increased by 30%. Comparing to the previous match, the income from the sale of tickets were

- | | | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| A.
increased
by 30% | B.
decreased
by 30 | Γ.
increased
by 9% | Δ.
decreased
by 9% | E. remained
the same |
|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|

12. At the figure below the cosine of angle θ is equal to



- A. $\frac{120}{160}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ Γ. $\frac{4}{3}$ Δ. $\frac{3}{5}$ E. 30°

13. If $17x + 51y = 102$ then $9x + 27y$ is equal to

- A. 36 B. 34 Γ. 54 Δ. 18 E. undetermined

14. In the sequence $\dots \kappa, \lambda, \mu, \nu, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ each term is the sum of the two numbers on its left. The value of κ is

- A. 0 B. 2 Γ. -2 Δ. 3 E. -3

15. The number x belongs to the set of numbers $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$.
How many of the numbers $x^3 - 2x^2$ are perfect squares.

- A. 6 B. 4 Γ. 7 Δ. 49 E. none

16. For how many integer values of N the number $\frac{N+3}{N-1}$ is an integer.

- A. 2 B. 4 Γ. 6 Δ. 8 E. 0

17. The value of $2013^2 - 2012 \cdot 2014$ is equal to

- A. 2013 B. -2 Γ. 2 Δ. 11 E. 1

18. If $f(x) = 3x - 1$ and $g(a, \beta) = a^2 - \beta$ then $g(6, f(6))$ is equal to

- A. 0 B. 30 Γ. 36 Δ. 15 E. 19

19. If $(\alpha * \beta) = (\alpha + \beta)^{\alpha - \beta}$ then $(8 * (4 * (2 * 1)))$ is equal to

- A. 64 B. 32 Γ. 8 Δ. 16 E. 15

20. All the surfaces of a wooden cube with side length 5cm are painted. Then the cube is divided into 125 equal cubes with side length 1cm. How many of the cubes with side 1 cm don't have any paint on them.

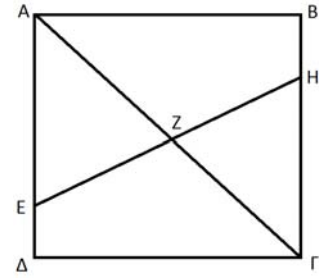
- A. 27 B. 64 Γ. 25 Δ. 100 E. 0

21. The value of the product

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{59}\right)$$

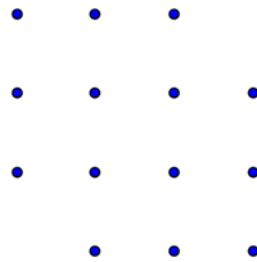
- A. 118 B. 60 Γ. 59 Δ. 20 E. $\frac{1}{118}$

22. $ABΓΔ$ is a square with $\widehat{AZH} = 120^\circ$.
Find the angle AEZ .



- A. 45° B. 80° Γ. 60° Δ. 50° E. 75°

23. How many squares can be formed using 4 of the dots as vertices?

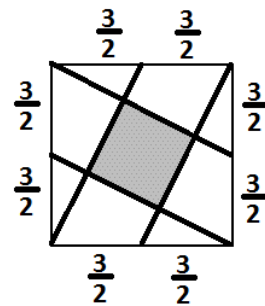


- A. 13 B. 12 Γ. 11 Δ. 10 E. 9

24. A car has 6 seats, 2 seats in the front and 4 in rear seats. In how many different ways can they sit in the car the members of a 6-membered family, if the parents would sit in front seats?

- A. 4 B. 6 Γ. 24 Δ. 36 E. 48

25. The area of the shaded region is



- A. 1 B. $\frac{9}{4}$ Γ. $\frac{9}{20}$ Δ. $\frac{9}{5}$ E. none of the previous