**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2018***

***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ***

***Παρασκευή 26 Ιανουαρίου 2018 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ***

***Τάξη: Α΄ Γυμνασίου***

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

# ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

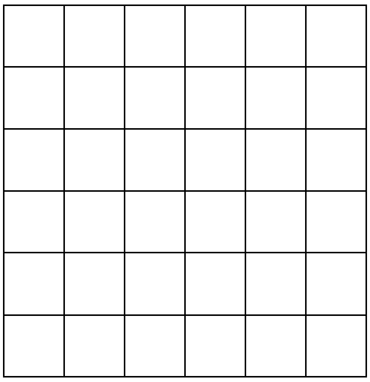
## ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνεται ένα 6Χ6 τετραγωνικό πλέγμα, που αποτελείται από 36 μοναδιαία τετραγωνάκια (δηλαδή τετραγωνάκια με πλευρά 1 μονάδα το καθένα), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

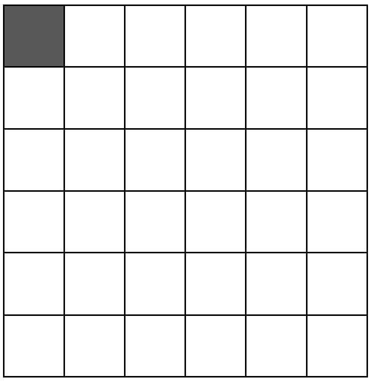
**(α)** Αν το μοναδιαίο τετραγωνάκι που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη σκιαστεί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, να βρείτε πόσα τετράγωνα 3Χ3 μπορούν να διαμορφωθούν στο πλέγμα, τα οποία **να μην** επικαλύπτουν (περιέχουν) το σκιασμένο τετραγωνάκι.

**(β)** Αν το μοναδιαίο τετραγωνάκι που βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή και τρίτη στήλη σκιαστεί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, να βρείτε πόσα τετράγωνα (διαφόρων διαστάσεων) μπορούν να διαμορφωθούν στο πλέγμα, τα οποία **να μην** επικαλύπτουν (περιέχουν) το σκιασμένο τετραγωνάκι.

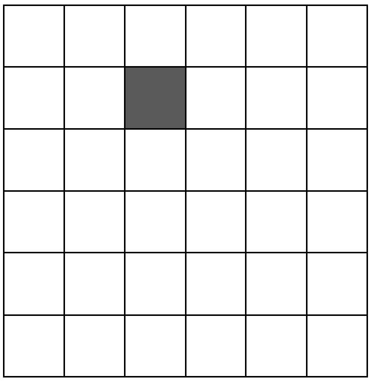
**(γ)** Να σκιάσετε ένα μοναδιαίο τετραγωνάκι στο Σχήμα 1, ώστε το πλήθος όλων των τετραγώνων διαφόρων διαστάσεων που μπορούν να διαμορφωθούν και **να μην** επικαλύπτουν (περιέχουν) το σκιασμένο τετραγωνάκι , να είναι ακριβώς 63.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

## ΛΥΣΗ

(α) Ένας τρόπος υπολογισμού των $3X3$ τετραγώνων είναι:

- Στο ορθογώνιο $[6-2]\times[2-14]$ έχουμε **3** τετράγωνα $3X3$
- Στο ορθογώνιο $[12-7]\times[19-7]$ έχουμε **4** τετράγωνα $3X3$
- Στο ορθογώνιο $[18-13]\times[25-13]$ έχουμε **4** τετράγωνα $3X3$
- Στο ορθογώνιο $[24-19]\times[31-19]$ έχουμε **4** τετράγωνα $3X3$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |

Σύνολο: 3+4+4+4=**15** τετράγωνα $3X3$.

(β)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |

- Τετράγωνα διαστάσεων $1 \times 1$ έχουμε $\mathbf{35}$.
- Τετράγωνα διαστάσεων $2 \times 2$

  Στο ορθογώνιο $[6-1] \times [7-1]$ έχουμε
  $\mathbf{3}$ τετράγωνα $2X2$

  Στο ορθογώνιο $[12-7] \times [13-7]$ έχουμε
  $\mathbf{3}$ τετράγωνα $2X2$

  Στο ορθογώνιο $[18-13] \times [19-13]$ έχουμε
  $\mathbf{5}$ τετράγωνα $2X2$

  Στο ορθογώνιο $[24-19] \times [25-19]$ έχουμε
  $\mathbf{5}$ τετράγωνα $2X2$

  Στο ορθογώνιο $[30-25] \times [31-25]$ έχουμε
  $\mathbf{5}$ τετράγωνα $2X2$

  Τετράγωνα διαστάσεων $2 \times 2$ έχουμε $\mathbf{21}$.
- Τετράγωνα διαστάσεων $3 \times 3$

  Στο ορθογώνιο $[6-1] \times [13-1]$ έχουμε
  $\mathbf{1}$ τετράγωνο $3X3$

  Στο ορθογώνιο $[12-7] \times [19-7]$ έχουμε
  $\mathbf{1}$ τετράγωνο $3X3$

  Στο ορθογώνιο $[18-13] \times [25-13]$ έχουμε
  $\mathbf{4}$ τετράγωνα $3X3$

  Στο ορθογώνιο $[24-19] \times [31-19]$ έχουμε
  $\mathbf{4}$ τετράγωνα $3X3$

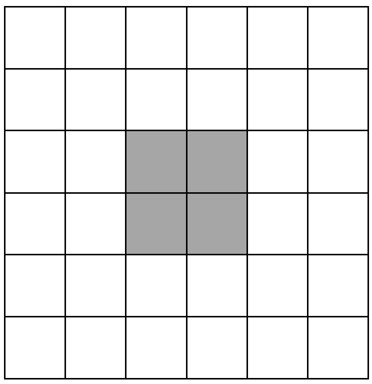
  Τετράγωνα διαστάσεων $3 \times 3$ έχουμε $\mathbf{10}$.
- Τετράγωνα διαστάσεων $4 \times 4$

  Στο ορθογώνιο $[18-13] \times [31-13]$ έχουμε
  $\mathbf{3}$ τετράγωνα $4X4$

  Τετράγωνα διαστάσεων $4 \times 4$ έχουμε $\mathbf{3}$.

Σύνολο: $35 + 21 + 10 + 3 = $ **69 τετράγωνα όλων των διαστάσεων.**

(γ) Αν σκιάσουμε ένα από τα τέσσερα τετραγωνάκια του κέντρου τότε το πλήθος των τετραγώνων όλων των διαστάσεων θα είναι ακριβώς $\mathbf{63}$.



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2018***
***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ***
***Παρασκευή 26 Ιανουαρίου 2018 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ***
***Τάξη: Β΄ Γυμνασίου***

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

**ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………………………..**

| Ώρα έναρξης | Ώρα λήξης 11:00 | Ώρα παράδοσης |
|---|---|---|

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ**

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι γνώσεων, που γίνεται κάθε Σαββατοκύριακο, παίρνουν μέρος πέντε διαγωνιζόμενοι $A, B, \Gamma, \Delta, E$ και παίζεται ως εξής:

- Το Σάββατο οι διαγωνιζόμενοι απαντούν σε ερωτήσεις και συγκεντρώνουν μη αρνητικό ακέραιο πλήθος βαθμών ο καθένας, τους οποίους μεταφέρουν στο παιχνίδι της Κυριακής.
- Την Κυριακή το παιχνίδι διεξάγεται σε **πέντε γύρους** ερωτήσεων και σε κάθε γύρο ένας διαγωνιζόμενος είναι ο πιο αδύναμος και «χάνει».
- Ο διαγωνιζόμενος που «χάνει» σε κάθε γύρο μπορεί να παραμείνει στο παιχνίδι δίνοντας σε κάθε άλλο διαγωνιζόμενο τόσους βαθμούς όσους ο καθένας έχει εκείνη τη στιγμή (δηλαδή, καθένας από τους άλλους τέσσερις διπλασιάζει τους βαθμούς του) . Αν δεν μπορεί να το κάνει αυτό, τότε φεύγει από το παιχνίδι.

Την Κυριακή οι διαγωνιζόμενοι που «έχασαν» σε κάθε γύρο ήταν κατά σειρά οι $A, B, \Gamma, \Delta, E$. Μετά το τέλος του $5^{ου}$ γύρου, εξακολουθούσαν να παραμένουν όλοι στο παιχνίδι και μάλιστα είχαν όλοι τους το ίδιο ακέραιο πλήθος $\boldsymbol{x}$ βαθμών.

**(α)** Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, που δείχνει το πλήθος των βαθμών των πέντε διαγωνιζομένων **στην αρχή του κάθε γύρου**.

**(β)** Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος βαθμών που μπορεί να έχει κάθε διαγωνιζόμενος, πριν την έναρξη του διαγωνισμού της Κυριακής.

**ΛΥΣΗ** ***(Να εξηγήσετε πλήρως την απάντησή σας)***

**(α)** Σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού αφού στο τέλος έχουν όλοι οι διαγωνιζόμενοι το ίδιο ακέραιο πλήθος $\boldsymbol{x}$ βαθμών τότε θα πάρουμε:

- στην αρχή του $5^{ου}$ γύρου θα είχαν

οι $A, B, \Gamma, \Delta \longrightarrow \frac{x}{2}$ και ο $E$ που έχασε και έδωσε βαθμούς στους υπόλοιπους θα πρέπει να είχε

$$\varepsilon = x + \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 3x$$

- στην αρχή του $4^{ου}$ γύρου θα είχαν

οι $A, B, \Gamma \longrightarrow \frac{x}{4}$ ,ο $E \longrightarrow \frac{3x}{2}$ και ο $\Delta$που έχασε και έδωσε βαθμούς στους υπόλοιπους θα πρέπει να είχε

$$\delta = \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{3x}{2}\right) = \frac{11x}{4}$$

- στην αρχή του 3^ου γύρου θα είχαν

οι $A, B \longrightarrow \frac{x}{8}$ ,ο $E \longrightarrow \frac{3x}{4}$, ο $\Delta \longrightarrow \frac{11x}{8}$ και ο $\Gamma$ που έχασε και έδωσε βαθμούς στους υπόλοιπους θα πρέπει να είχε

$$\gamma = \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{11x}{8}\right) = \frac{21x}{8}$$

- στην αρχή του 2^ου γύρου θα είχαν

ο $A \longrightarrow \frac{x}{16}$ , ο $\Gamma \longrightarrow \frac{21x}{16}$ , ο $E \longrightarrow \frac{3x}{8}$, ο $\Delta \longrightarrow \frac{11x}{16}$ και ο $B$ που έχασε και έδωσε βαθμούς στους υπόλοιπους θα πρέπει να είχε

$$\beta = \frac{x}{8} + \left(\frac{x}{16} + \frac{3x}{8} + \frac{21x}{16} + \frac{11x}{16}\right) = \frac{41x}{16}$$

- στην αρχή του 1^ου γύρου θα είχαν

ο $B \longrightarrow \frac{41x}{32}$ , ο $\Gamma \longrightarrow \frac{21x}{32}$ , ο $E \longrightarrow \frac{3x}{16}$, ο $\Delta \longrightarrow \frac{11x}{32}$ και ο $A$ που έχασε και έδωσε βαθμούς στους υπόλοιπους θα πρέπει να είχε

$$\alpha = \frac{x}{16} + \left(\frac{41x}{32} + \frac{21x}{32} + \frac{3x}{16} + \frac{11x}{32}\right) = \frac{81x}{32}$$

Επομένως ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

| | $A$ | $B$ | $\Gamma$ | $\Delta$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1ος γύρος** | $\frac{81x}{32}$ | $\frac{41x}{32}$ | $\frac{21x}{32}$ | $\frac{11x}{32}$ | $\frac{3x}{16}$ |
| **2ος γύρος** | $\frac{x}{16}$ | $\frac{41x}{16}$ | $\frac{21x}{16}$ | $\frac{11x}{16}$ | $\frac{3x}{8}$ |
| **3ος γύρος** | $\frac{x}{8}$ | $\frac{x}{8}$ | $\frac{21x}{8}$ | $\frac{11x}{8}$ | $\frac{3x}{4}$ |
| **4ος γύρος** | $\frac{x}{4}$ | $\frac{x}{4}$ | $\frac{x}{4}$ | $\frac{11x}{4}$ | $\frac{3x}{2}$ |
| **5ος γύρος** | $\frac{x}{2}$ | $\frac{x}{2}$ | $\frac{x}{2}$ | $\frac{x}{2}$ | $3x$ |

**(β)** Αφού στην αρχή του 1^ου γύρου οι πέντε διαγωνιζόμενοι έχουν τους παρακάτω βαθμούς

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{81x}{32}$ | $\frac{41x}{32}$ | $\frac{21x}{32}$ | $\frac{11x}{32}$ | $\frac{3x}{16}$ |

και το πλήθος των βαθμών είναι μη αρνητικός ακέραιος αριθμός, τότε το ελάχιστο πλήθος βαθμών που μετέφεραν οι διαγωνιζόμενοι από το Σάββατο είναι:

$$A \longrightarrow 81, \quad B \longrightarrow 41, \quad \Gamma \longrightarrow 21, \quad \Delta \longrightarrow 11, \quad E \longrightarrow 6$$

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2018***

***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ***

***Παρασκευή 26 Ιανουαρίου 2018 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ***

***Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου***

**ΣΧΟΛΕΙΟ…………………………………………………………………..**

| Ώρα έναρξης | Ώρα λήξης 11:45 | Ώρα παράδοσης |
|---|---|---|

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ**

Η Μαρία και ο Γιώργος συμμετείχαν στο παιχνίδι του κρυμμένου θησαυρού, το οποίο οργάνωσε η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία κατά την διάρκεια του Καλοκαιρινού Μαθηματικού σχολείου. Ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο $A$, αναζητώντας το σημείο ελέγχου $B$, ακολουθώντας διαδρομές ως εξής:

- Ο Γιώργος προχώρησε κατευθείαν προς τα νότια διανύοντας $150\ m$, έφτασε στο σημείο $Z$ και μετά στράφηκε κατευθείαν ανατολικά και, αφού περπάτησε $600\ m$, βρήκε το σημείο ελέγχου $B$.
- Η Μαρία προχώρησε κατευθείαν προς τα βόρεια, έφτασε σε ένα σημείο $\Gamma$ και άλλαξε πορεία ακολουθώντας μια διαδρομή που την έφερε κατευθείαν στο σημείο ελέγχου $B$.

**(α)** Αν ξέρουμε ότι η Μαρία και ο Γιώργος για να φτάσουν από το σημείο $A$ στο σημείο ελέγχου $B$ διήνυσαν την ίδια απόσταση, να υπολογίσετε την απόσταση που διήνυσε η Μαρία από το σημείο $A$ στο σημείο $\Gamma$.

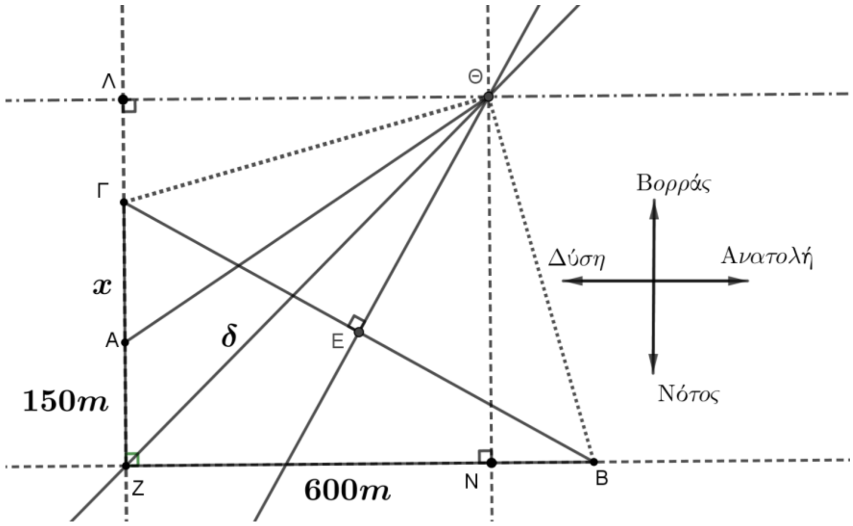
**(β)** Αν ξέρουμε ότι ο κρυμμένος θησαυρός βρίσκεται σε ένα σημείο $\Theta$ το οποίο ισαπέχει (δηλαδή έχει ίση απόσταση) από τα σημεία $B, \Gamma$ και ισαπέχει (δηλαδή έχει ίση απόσταση) από τις ευθείες $\Gamma Z, BZ$, να περιγράψετε με ποιο τρόπο μπορείτε να προσδιορίσετε πού βρίσκεται ο θησαυρός, κάνοντας ένα σχήμα.

**(γ)** Αν η απόσταση $\Theta Z = \delta\ m$, να υπολογίσετε, συναρτήσει του $\delta$, πόσο απέχει ο θησαυρός από το σημείο $A$.

**<u>ΛΥΣΗ</u>** ***(Να εξηγήσετε πλήρως την απάντησή σας)***

(α) Από την υπόθεση και το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$$150 + 600 = \mathrm{x} + \sqrt{600^2 + (150 + \mathrm{x})^2} \Leftrightarrow (750 - \mathrm{x})^2 = 600^2 + (150 + \mathrm{x})^2$$
$$\Leftrightarrow (750 - \mathrm{x})^2 - (150 + \mathrm{x})^2 = 600^2$$
$$\Leftrightarrow (750 - \mathrm{x} + 150 + \mathrm{x})(750 - \mathrm{x} - 150 - \mathrm{x}) = 600^2 \Leftrightarrow$$
$$900(600 - 2\mathrm{x}) = 600 \cdot 600 \Leftrightarrow$$
$$600 - 2\mathrm{x} = \frac{6 \cdot 600}{3 \cdot 3} \Leftrightarrow 600 - 2\mathrm{x} = 2 \cdot 200 \Leftrightarrow$$
$$2\mathrm{x} = 200 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{x} = 100\mathrm{m}.$$




(β) Το Θ θα είναι το σημείο τομής της διχοτόμου της ορθής γωνίας $\angle\Gamma ZB$ και της μεσοκαθέτου της υποτείνουσας ΒΓ.

(γ) Φέρουμε $\Theta\Lambda \perp \Gamma Z$ και $\Theta N \perp BZ$ τότε το τετράπλευρο ΛΘΝΖ είναι τετράγωνο.
Άρα

$$2\Theta\Lambda^2 = \delta^2 \Longrightarrow \Theta\Lambda^2 = \frac{\delta^2}{2} \Longrightarrow \Theta\Lambda = \frac{\delta\sqrt{2}}{2}$$

Άρα,

$$A\Lambda = \frac{\delta\sqrt{2}}{2} - 150$$

Επομένως,

$$A\Theta = \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + \left(\frac{\delta\sqrt{2}}{2} - 150\right)^2} = \sqrt{\delta^2 - 150\sqrt{2}\delta + 150^2}$$