



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/12/2017

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1

Δύο φίλοι, οι A και B , έχουν από μια υπολογιστική μηχανή και αρχίζουν να κάνουν πράξεις ταυτόχρονα. Ο A ξεκινά με τον αριθμό 100 και σε κάθε βήμα προσθέτει 3, ενώ ο B ξεκινά με τον αριθμό 2018 και σε κάθε βήμα αφαιρεί 4. Ύστερα από n βήματα, οι δύο φίλοι καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα.

- (α) Να βρείτε την τιμή του n .
(β) Ποιο είναι το κοινό αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουν οι δύο φίλοι;

Προτεινόμενη Λύση

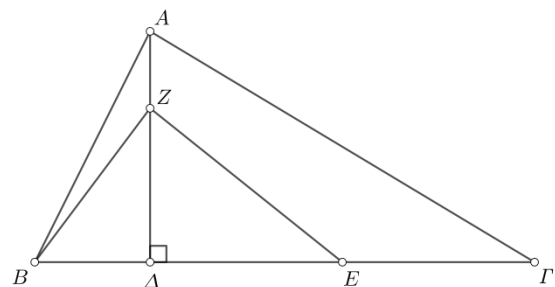
- (α) Ύστερα από n βήματα, ο A καταλήγει στον αριθμό $100 + 3n$, ενώ ο B στον αριθμό $2018 - 4n$. Αφού οι A και B καταλήγουν στον ίδιο αριθμό, τότε:

$$\begin{aligned} 100 + 3n &= 2018 - 4n \Rightarrow 3n + 4n = 2018 - 100 \\ &\Rightarrow 7n = 1918 \\ &\Rightarrow n = \frac{1918}{7} = 274 \end{aligned}$$

- (β) Το κοινό αποτέλεσμα των δύο φίλων είναι $100 + 3 \cdot 274 = 922$.

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Το AD είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το E είναι το μέσο του $\Delta\Gamma$ και το Z είναι σημείο του AD , ώστε το μήκος του ΔZ να είναι διπλάσιο από το μήκος του AZ . Αν το εμβαδόν του τριγώνου ABZ είναι 5 cm^2 και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AGEZ$ είναι 30 cm^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου BEZ .



Προτεινόμενη Λύση

Το τρίγωνο $BZ\Delta$ έχει ίδιο ύψος και διπλάσια βάση από το τρίγωνο BZA Άρα:

$$E_{BZ\Delta} = 2E_{BZA} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}^2$$

Από τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε ότι:

$$(\Delta Z) = \frac{2}{3}(A\Delta), \quad (\Delta E) = \frac{1}{2}(\Delta\Gamma)$$

Θα υπολογίσουμε τι μέρος του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ είναι το τρίγωνο ΔZE και το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$. Έχουμε:

$$E_{\Delta EZ} = \frac{1}{2}(\Delta Z)(\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(A\Delta) \cdot \frac{1}{2}(\Delta\Gamma) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(A\Delta)(\Delta\Gamma) = \frac{1}{3}E_{A\Delta\Gamma} \quad (1)$$

$$E_{A\Gamma EZ} = E_{A\Delta\Gamma} - E_{\Delta EZ} = E_{A\Delta\Gamma} - \frac{1}{3}E_{A\Delta\Gamma} = \frac{2}{3}E_{A\Delta\Gamma}$$

Άρα:

$$E_{A\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}E_{A\Gamma EZ} = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45 \text{ cm}^2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), παίρνουμε:

$$E_{\Delta EZ} = \frac{1}{3}E_{A\Delta\Gamma} = \frac{1}{3} \cdot 45 = 15 \text{ cm}^2, \quad E_{BEZ} = 10 + 15 = 25 \text{ cm}^2$$

Πρόβλημα 3

Τρία δοχεία, τα A, B και Γ , περιέχουν διάλυμα νερού με οξύ. Το δοχείο A περιέχει 400 ml διάλυμα με περιεκτικότητα 45% σε οξύ. Το δοχείο B περιέχει 500 ml διάλυμα με περιεκτικότητα 48% σε οξύ. Το δοχείο Γ περιέχει 100 ml διάλυμα με άγνωστη περιεκτικότητα σε οξύ. Αδειάζουμε όλη την ποσότητα διαλύματος του δοχείου Γ στα δύο πρώτα δοχεία, ώστε και τα δύο να έχουν τώρα διάλυμα με περιεκτικότητα 50% σε οξύ το καθένα. Να υπολογίσετε την ποσότητα (σε ml) από διάλυμα που προσθέσαμε στο δοχείο A .

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $x\%$ η περιεκτικότητα του οξέος στο δοχείο Γ . Από τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει ότι:

- Το δοχείο A περιέχει $\frac{45}{100} \cdot 400 = 180 \text{ ml}$ οξύ και $400 - 180 = 220 \text{ ml}$ νερό.
- Το δοχείο B περιέχει $\frac{48}{100} \cdot 500 = 240 \text{ ml}$ οξύ και $500 - 240 = 260 \text{ ml}$ νερό.
- Το δοχείο Γ περιέχει $x \text{ ml}$ οξύ και $100 - x \text{ ml}$ νερό.

Αφού αδειάσουμε το περιεχόμενο του δοχείου Γ στα δοχεία A και B , η περιεκτικότητα οξέος στο καθένα από τα δύο δοχεία θα γίνει 50%. Επομένως, στο άθροισμα του περιεχομένου των δύο δοχείων, η περιεκτικότητα του οξέος θα είναι επίσης 50%. Έτσι, η συνολική ποσότητα οξέος και στα τρία δοχεία θα είναι ίση με την ποσότητα νερού που περιέχουν. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} 180 + 240 + x &= 220 + 260 + 100 - x \Rightarrow 420 + x = 580 - x \\ &\Rightarrow 2x = 580 - 420 \Rightarrow 2x = 160 \\ &\Rightarrow x = 80\% \end{aligned}$$

Αφού η περιεκτικότητα του οξέος στο δοχείο Γ είναι 80%, προκύπτει ότι ο λόγος του οξέος προς το νερό είναι 80 προς 20 ή ισοδύναμα 4 προς 1. Δηλαδή, κάθε 5y ml διάλυμα από το δοχείο Γ , τα 4y ml θα είναι οξύ και τα y ml νερό.

Έστω ότι τοποθετήσαμε 5y ml διάλυμα από το δοχείο Γ στο δοχείο A . Τότε, το μείγμα που προκύπτει θα περιέχει $4y + 180$ ml οξύ και $y + 220$ ml νερό. Το οξύ έχει περιεκτικότητα 50%. Άρα:

$$4y + 180 = y + 220 \Rightarrow 4y - y = 220 - 180 \Rightarrow 3y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{3} \Rightarrow 5y = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$$

Επομένως, τοποθετήσαμε $66\frac{2}{3}$ ml διάλυμα από το δοχείο Γ στο δοχείο A .

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι του 2017 και οι οποίοι όταν διαιρεθούν με τους αριθμούς 7, 8 και 9 αφήνουν υπόλοιπα 6, 7 και 8, αντίστοιχα.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω x φυσικός αριθμός μικρότερος του 2017 τέτοιος, ώστε να αφήνει υπόλοιπα 6, 7 και 8, όταν διαιρεθεί με τους αριθμούς 7, 8 και 9, αντίστοιχα.

Αφού ο x διαιρείται με το 7 και αφήνει υπόλοιπο 6, τότε υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος, ώστε $x = 7\kappa + 6$. Άρα, ο $x + 1 = 7\kappa + 7$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Ομοίως, προκύπτει ότι ο $x + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8 και του 9.

Επομένως, ο $x + 1$ είναι πολλαπλάσιο του $504 = ΕΚΠ[7, 8, 9]$ και μικρότερος από το 2017.

Άρα:

$$x + 1 \in \{504, 1008, 1512, 2015\} \Rightarrow x \in \{503, 1007, 1511, 2015\}$$