

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

**ΙΘ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ  
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2018**

**22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2018**



**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ &  
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**[www.cms.org.cy](http://www.cms.org.cy)**

**ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ  
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH**



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ  
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2018**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ  
ΕΚΔΟΣΗ**



## ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

Email: [cms@cms.org.cy](mailto:cms@cms.org.cy) - Ιστοσελίδα: [www.cms.org.cy](http://www.cms.org.cy)

# ΙΘ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 22/04/2018

## ΔΟΚΙΜΙΟ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά**

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα  $2+3=?$  (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

**Σωστή συμπλήρωση:**

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

**Λανθασμένη συμπλήρωση:**

1. (A) (B) (C) (D) (E)

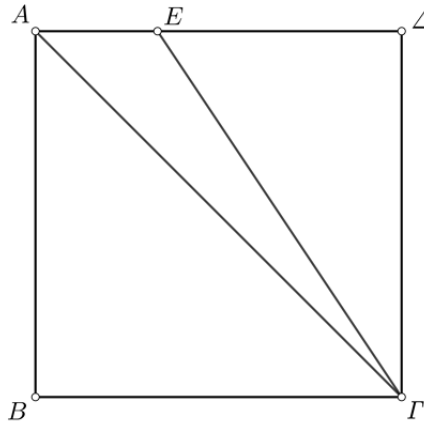
1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. Αν  $x - \frac{1}{x} = 5$ , τότε το  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  ισούται με:

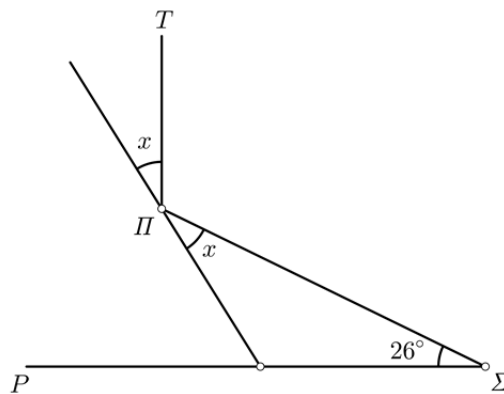
A. 23      B. 24      Γ. 25      Δ. 26      Ε. 27

2. Στο πιο κάτω σχήμα το τετράγωνο  $ABΓΔ$  έχει πλευρά μήκους 24 cm. Αν το τρίγωνο  $ΑΓΕ$  έχει εμβαδόν  $60 \text{ cm}^2$ , να υπολογίσετε το μήκος του  $ΔΕ$ .



A. 7 cm      B. 10 cm      Γ. 14 cm      Δ. 19 cm      Ε. 20 cm

3. Στο πιο κάτω σχήμα η  $ΠΤ$  είναι κάθετη στην  $ΡΣ$  και η γωνία  $Σ$  είναι  $26^\circ$ . Η γωνία  $x$  ισούται με:



A.  $13^\circ$       B.  $26^\circ$       Γ.  $32^\circ$       Δ.  $58^\circ$       Ε.  $64^\circ$

4. Αν οι ευθείες  $kx + 2y = 7$  και  $6x + \lambda y = 3$  ταυτίζονται (συμπίπτουν), τότε το  $k$  ισούται με:

A. 3      B. 6      Γ. 7      Δ. 14      Ε. 21

5. Η αριθμητική παράσταση

$$10 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right)^{-1}$$

ισούται με:

- A. 3                      B. 8                      Γ.  $\frac{25}{2}$                       Δ.  $\frac{170}{3}$                       E. 170
6. Δίνονται επτά αριθμοί σε σειρά. Ο μέσος όρος των τεσσάρων πρώτων αριθμών είναι 6 και το άθροισμα των τελευταίων τεσσάρων αριθμών είναι 36. Αν ο μέσος όρος των επτά αριθμών είναι  $6\frac{5}{7}$ , να βρείτε τον αριθμό που βρίσκεται στην 4<sup>η</sup> θέση.
- A. 13                      B. 54                      Γ. 56                      Δ. 58                      E. Δεν μπορεί να υπολογιστεί

7. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$\frac{(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30)}{\sqrt{x - 5}} = 0$$

είναι:

- A. 0                      B. 1                      Γ. 2                      Δ. 3                      E. 4
8. Σε ένα διαγώνισμα ο μέσος όρος των βαθμών του Αντρέα του Βασίλη και του Γιώργου ήταν 54. Ο μέσος όρος των βαθμών του Βασίλη του Γιώργου και του Δημήτρη ήταν 66. Πόσες περισσότερες μονάδες από τον Αντρέα πήρε ο Δημήτρης;

- A. 4                      B. 6                      Γ. 12                      Δ. 24                      E. 36

9. Αν  $[x, y, z] = x + yz$ , τότε η τιμή του  $[[1, 2, 3], [2, 3, 1], [3, 2, 1]]$  ισούται με:

- A. 32                      B. 37                      Γ. 40                      Δ. 41                      E. 47

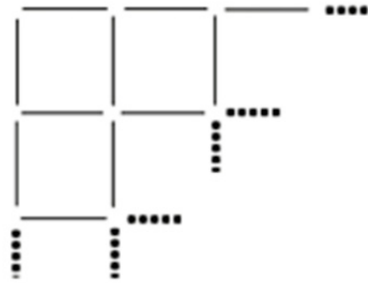
10. Ο αριθμός  $A = 2017^2 + 4035$  ως τέλειο τετράγωνο γράφεται ως:

- A.  $2017^2$                       B.  $2018^2$                       Γ.  $2019^2$                       Δ.  $2020^2$                       E.  $2021^2$

11. Αν  $x + y = 199$  και  $x + \omega = 201$ , να υπολογίσετε το  $A = (2x + y + \omega)(\omega - y)$ .

- A. -800                      B. 800                      Γ. 400                      Δ. -400                      E. 0

12. Για την κατασκευή ενός πλέγματος χρησιμοποιούμε οδοντογλυφίδες, όπως στο πιο κάτω σχήμα. Αν το πλέγμα έχει 60 οδοντογλυφίδες μήκος και 32 οδοντογλυφίδες πλάτος, να βρείτε πόσες οδοντογλυφίδες χρησιμοποιήθηκαν συνολικά.



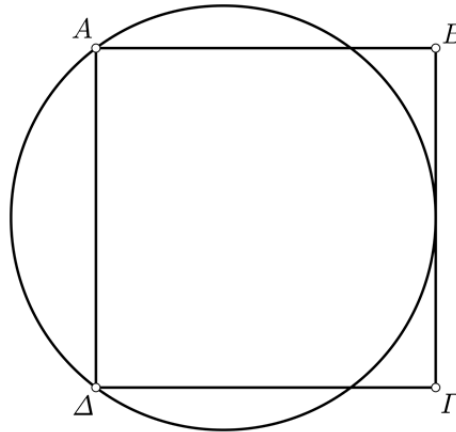
- A. 1920      B. 1952      Γ. 1980      Δ. 3840      E. 3932
13. Αν  $(x^3 + y^3)^2 = (x^2 + y^2)^3$  με  $xy \neq 0$ , τότε το  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  ισούται με:
- A. 2      B. 3      Γ.  $\frac{2}{3}$       Δ.  $\frac{3}{2}$       E. 1
14. Αν  $x + 2(y + \omega) = 11$ ,  $y + 2(x + \omega) = 10$  και  $\omega + 2(x + y) = 9$ , τότε το  $x + 2y + 3\omega$  ισούται με:
- A. 8      B. 10      Γ. 11      Δ. 13      E. 14
15. Έστω  $a + 1 = \beta + 2 = \gamma + 3 = \delta + 4 = a + \beta + \gamma + \delta + 5$ . Το  $a + \beta + \gamma + \delta$  είναι ίσο με:
- A. -5      B.  $-\frac{10}{3}$       Γ.  $-\frac{7}{3}$       Δ.  $\frac{5}{3}$       E. 5
16. Η Πρωτοχρονιά του 2018 ήταν Δευτέρα. Ποια είναι η πρώτη χρονιά που θα είναι ξανά η πρωτοχρονιά Δευτέρα;
- A. 2023      B. 2024      Γ. 2025      Δ. 2029      E. 2030
17. Φέρνουμε όλες τις διαγώνιους ενός κανονικού εξαγώνου. Πόσα είναι τα σημεία τομής τους μέσα στο εξαγώνο;
- A. 5      B. 7      Γ. 10      Δ. 13      E. 15

18. Δίνεται ότι  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ . Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού:

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 2017!$$

- A. 1                      B. 3                      Γ. 5                      Δ. 7                      Ε. 9

19. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς 32 cm. Γράφουμε κύκλο που περνά από τα  $A, \Delta$  και εφάπτεται της  $B\Gamma$ . Η ακτίνα του κύκλου ισούται με:



- A. 8 cm                      B. 16 cm                      Γ. 18 cm                      Δ. 20 cm                      Ε.  $16\sqrt{2}$  cm

20. Ο αριθμός των διαφορετικών ζευγών ακεραίων  $(x, y)$ , με  $x \geq 0$ , που ικανοποιούν την εξίσωση  $5x^2 - 4xy + y^2 = 289$  είναι:

- A. 3                      B. 4                      Γ. 5                      Δ. 7                      Ε. 8

21. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $(x^2 + x - 1)^{x^2 - 8x + 15} = 1$  είναι:

- A. 2                      B. 3                      Γ. 4                      Δ. 5                      Ε. 6

22. Μία υπολογιστική έχει μόνο δύο κουμπιά. Αν στην υπολογιστική είναι γραμμένος ο αριθμός  $x$ ,  $x \neq 0$ , και πατήσουμε το πρώτο κουμπί, τότε η υπολογιστική βγάζει την απάντηση  $\frac{1}{x}$ . Αν αντί το πρώτο πατήσουμε το δεύτερο κουμπί, τότε βγάζει την απάντηση  $1 - x$ . Αρχικά στην υπολογιστική είναι γραμμένος ο αριθμός 2018. Πατώντας τα κουμπιά με όποια σειρά θέλουμε, πόσους διαφορετικούς αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε συμπεριλαμβανομένου του 2018;

- A. 2                      B. 3                      Γ. 4                      Δ. 6                      Ε. Άπειρος



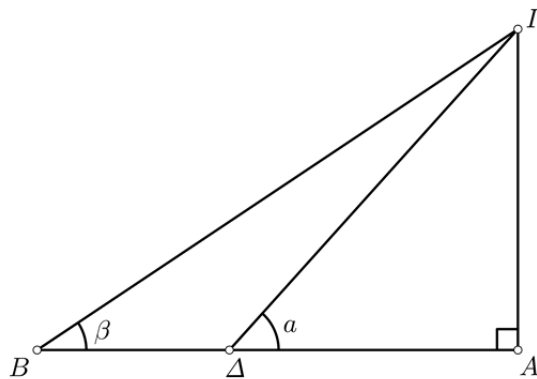
23. Να υπολογίσετε το  $3 + 5 + 7 + \dots + 2017 - 2 - 4 - 6 - \dots - 2016$ .

- A. 1008      B. 1009      Γ. -1009      Δ. -1008      E. 0

24. Σε μία ευθεία παίρνουμε στη σειρά σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$ , έτσι ώστε  $AB = \Gamma\Delta$  και  $B\Gamma = 12$ . Σημείο  $E$  βρίσκεται εκτός της ευθείας, έτσι ώστε  $BE = \Gamma E = 10$ . Η περίμετρος του τριγώνου  $AE\Delta$  είναι διπλάσια από την περίμετρο του τριγώνου  $BE\Gamma$ . Να υπολογίσετε το μήκος του  $AB$ .

- A.  $\frac{15}{2}$       B. 8      Γ.  $\frac{17}{2}$       Δ.  $\frac{19}{2}$       E. 9

25. Στο πιο κάτω σχήμα το  $B\Delta$  ισούται με 1. Το  $A\Gamma$  ισούται με:



- A.  $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu(a - \beta)}$       B.  $\frac{\epsilon\phi\beta}{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}$
- Γ.  $\frac{\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}$       Δ.  $\frac{1}{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}$
- E.  $\frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\eta\alpha \cdot (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)}$



**CYPRUS  
MATHEMATICAL  
OLYMPIAD  
2018**

**ENGLISH VERSION**



## CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY

36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos

Nicosia, Cyprus

Tel. 22378101, Fax: 22379122

Email: [cms@cms.org.cy](mailto:cms@cms.org.cy) -Website: [www.cms.org.cy](http://www.cms.org.cy)

# 19<sup>th</sup> CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 22/04/2018

## EXAMS PAPER

9<sup>th</sup> Grade – C' Gymnasium

10<sup>th</sup> Grade - A' Lyceum

**TIME: 60 minutes**

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result  $2+3=?$  (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct**

1.  A  B  C  D  E

1.  A  B  C  D  E

1.  A  B  C  D  E

and these are **incorrect**

1.  A  B  C  D  E

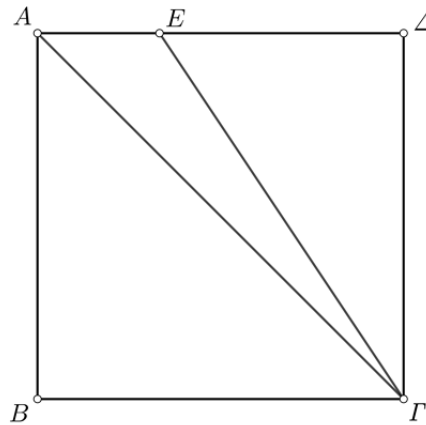
1.  A  B  C  D  E

1.  A  B  C  D  E

1. If  $x - \frac{1}{x} = 5$ , then  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  is equal to:

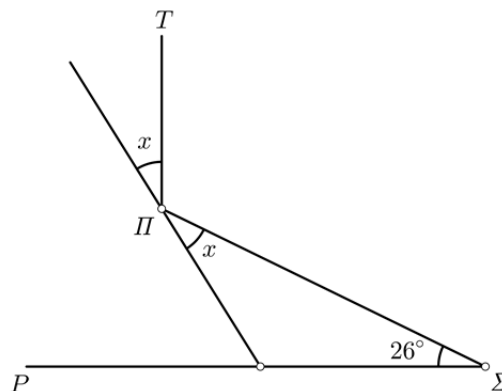
- A. 23      B. 24      Γ. 25      Δ. 26      E. 27

2. In the figure below  $AB\Gamma\Delta$  is a square of side 24 cm. If the triangle  $A\Gamma E$  has an area of  $60 \text{ cm}^2$ , then calculate the length of  $\Delta E$ .



- A. 7 cm      B. 10 cm      Γ. 14 cm      Δ. 19 cm      E. 20 cm

3. In the figure below the line  $\Pi T$  is perpendicular to the line  $P\Sigma$  and the angle  $\Sigma$  is equal to  $26^\circ$ . The angle  $x$  is equal to:



- A.  $13^\circ$       B.  $26^\circ$       Γ.  $32^\circ$       Δ.  $58^\circ$       E.  $64^\circ$

4. If the equations  $\kappa x + 2y = 7$  and  $6x + \lambda y = 3$  represent the same line, then  $\kappa$  is equal to:

- A. 3      B. 6      Γ. 7      Δ. 14      E. 21

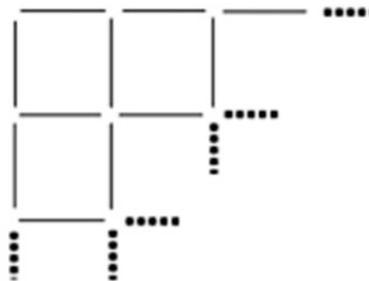
5. The expression

$$10 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right)^{-1}$$

is equal to:

- A. 3                      B. 8                      Γ.  $\frac{25}{2}$                       Δ.  $\frac{170}{3}$                       E. 170
6. We write seven numbers in ascending order. The average of the first four numbers is equal to 6 and the sum of the last four numbers is equal to 36. If the average of all seven numbers is equal to  $6\frac{5}{7}$ , determine the number appearing in the 4<sup>th</sup> position.
- A. 13                      B. 54                      Γ. 56                      Δ. 58                      E. It cannot be calculated
7. The number of solutions of the equation
- $$\frac{(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30)}{\sqrt{x - 5}} = 0$$
- is:
- A. 0                      B. 1                      Γ. 2                      Δ. 3                      E. 4
8. In a test the average mark of Andreas, Vasilis, and Giorgos was 54. The average mark of Vasilis, Giorgos and Demetres was 66. How many more marks than Andreas did Demetres get?
- A. 4                      B. 6                      Γ. 12                      Δ. 24                      E. 36
9. If  $[x, y, z] = x + yz$ , then the value of  $[[1, 2, 3], [2, 3, 1], [3, 2, 1]]$  is equal to:
- A. 32                      B. 37                      Γ. 40                      Δ. 41                      E. 47
10. The number  $A = 2017^2 + 4035$  can be written as perfect square as:
- A.  $2017^2$                       B.  $2018^2$                       Γ.  $2019^2$                       Δ.  $2020^2$                       E.  $2021^2$
11. If  $x + y = 199$  and  $x + \omega = 201$ , then calculate  $A = (2x + y + \omega)(\omega - y)$ .
- A. -800                      B. 800                      Γ. 400                      Δ. -400                      E. 0

12. We construct a grid using toothpicks as it is shown in the figure below. The grid has a length of 60 toothpicks and a width of 32 toothpicks. The total number of toothpicks used is:

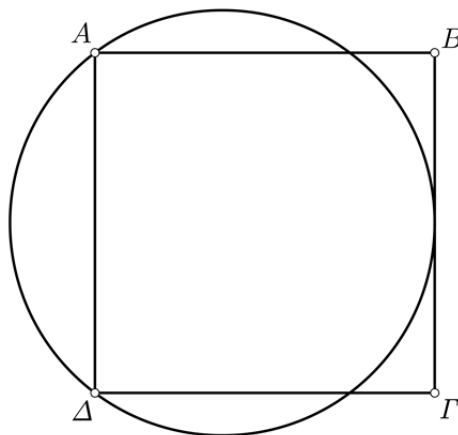


- A. 1920      B. 1952      Γ. 1980      Δ. 3840      E. 3932
13. If  $(x^3 + y^3)^2 = (x^2 + y^2)^3$  with  $xy \neq 0$ , then  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  is equal to:
- A. 2      B. 3      Γ.  $\frac{2}{3}$       Δ.  $\frac{3}{2}$       E. 1
14. If  $x + 2(y + \omega) = 11$ ,  $y + 2(x + \omega) = 10$  and  $\omega + 2(x + y) = 9$ , then  $x + 2y + 3\omega$  is equal to:
- A. 8      B. 10      Γ. 11      Δ. 13      E. 14
15. Let  $a + 1 = \beta + 2 = \gamma + 3 = \delta + 4 = a + \beta + \gamma + \delta + 5$ . Then  $a + \beta + \gamma + \delta$  is equal to:
- A. -5      B.  $-\frac{10}{3}$       Γ.  $-\frac{7}{3}$       Δ.  $\frac{5}{3}$       E. 5
16. The New Year's Day of 2018 was on a Monday. Which is the first year after 2018 in which the New Year's Day will be again on a Monday?
- A. 2023      B. 2024      Γ. 2025      Δ. 2029      E. 2030
17. We draw all the diagonals of a regular hexagon. How many points of intersection of these diagonals lie inside the hexagon?
- A. 5      B. 7      Γ. 10      Δ. 13      E. 15

18. Given  $v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots v$ , find the last digit of the number:  
 $1! + 2! + 3! + \cdots + 2017!$

A. 1                      B. 3                      Γ. 5                      Δ. 7                      E. 9

19.  $AB\Gamma\Delta$  is a square of side 32 cm. We draw a circle passing through  $A, \Delta$  and tangent to  $B\Gamma$ . The radius of the circle is equal to:



A. 8 cm                      B. 16 cm                      Γ. 18 cm                      Δ. 20 cm                      E.  $16\sqrt{2}$  cm

20. The total number of different pairs of integers  $(x, y)$ , with  $x \geq 0$ , which satisfy the equation  $5x^2 - 4xy + y^2 = 289$  is equal to:

A. 3                      B. 4                      Γ. 5                      Δ. 7                      E. 8

21. The number of solutions of the equation  $(x^2 + x - 1)^{x^2 - 8x + 15} = 1$  is equal to:

A. 2                      B. 3                      Γ. 4                      Δ. 5                      E. 6

22. A calculator has only two buttons. If initially the number  $x$ ,  $x \neq 0$ , is written on the calculator and we press the first button, then the calculator outputs the number  $\frac{1}{x}$ . If, instead of the first button, we press the second button, then the calculator outputs the number  $1 - x$ . Initially 2018 is written on the calculator. By pressing the two buttons, in any way that we like, how many different number can we produce including 2018?

A. 2                      B. 3                      Γ. 4                      Δ. 6                      E. Infinitely many



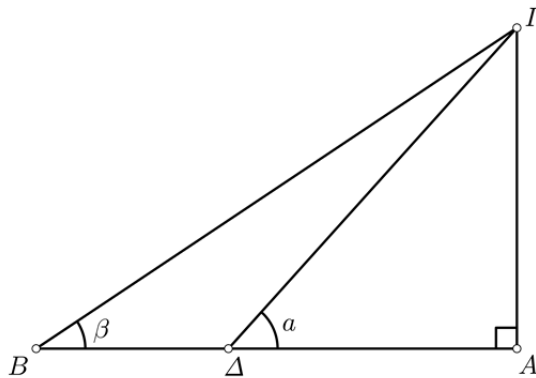
23. Calculate  $3 + 5 + 7 + \dots + 2017 - 2 - 4 - 6 - \dots - 2016$ .

- A. 1008      B. 1009      Γ. -1009      Δ. -1008      E. 0

24. Points  $A, B, \Gamma, \Delta$  appear consecutively on a line, such that  $AB = \Gamma\Delta$  and  $B\Gamma = 12$ . Point  $E$  is outside the line, such that  $BE = \Gamma E = 10$ . The perimeter of triangle  $AE\Delta$  is twice the perimeter of triangle  $BET$ . Calculate the length of  $AB$ .

- A.  $\frac{15}{2}$       B. 8      Γ.  $\frac{17}{2}$       Δ.  $\frac{19}{2}$       E. 9

25. In the figure below  $B\Delta$  is equal to 1. Then  $A\Gamma$  is equal to:



- A.  $\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$       B.  $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$   
 Γ.  $\frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$       Δ.  $\frac{1}{\tan\alpha - \tan\beta}$   
 E.  $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot (\sin\alpha - \sin\beta)}$

