ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ IMC STAGE III

ΜΑΡΤΗΣ 2018

Χρόνος Εξέτασης: **2ώρες**

Ημερομηνία: ***7/03/2018*** *Ώρα εξέτασης*: ***15:45 -17:45***

Να απαντήσετε τα θέματα 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας. Το κάθε θέμα είναι **10 μονάδες.**

ΘΕΜΑ 1:

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την εξίσωση $x^2+9y^2=\frac{13}{2}xy$.

Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $A=\frac{x-3y}{x+3y}$.

Προτεινόμενη Λύση:

$$\left(x-3y\right)^2=x^2+9y^2-6xy=\frac{13}{2}xy-6xy=\frac{1}{2}xy$$

$$\left(x+3y\right)^2=x^2+9y^2+6xy=\frac{13}{2}xy+6xy=\frac{25}{2}xy$$

$$A^2=\left(\frac{x-3y}{x+3y}\right)^2=\frac{\left(x-3y\right)^2}{\left(x+3y\right)^2}=\frac{\frac{xy}{2}}{\frac{25xy}{2}}=\frac{1}{25}$$ τότε

μεγαλύτερη τιμή $A=\frac{1}{5}$ και μικρότερη $A=-\frac{1}{5}$

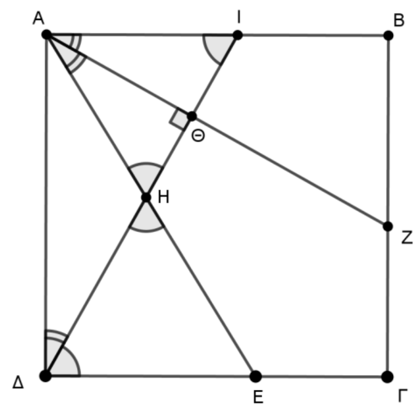
ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται τετράγωνο *ΑΒΓΔ*. Έστω *Ε* σημείο στην πλευρά *ΓΔ.* Η διχοτόμος της γωνίας *ΒΑΕ* τέμνει την *ΒΓ* στο *Ζ.* Η κάθετη από το *Δ* στην *ΑΖ,* τέμνει τις *ΑΕ, ΑΖ* και *ΑΒ* στα *Η, Θ* και *Ι* αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο *ΔΕΗ* είναι ισοσκελές.

β) *ΑΕ= ΒΖ +ΔΕ*

<u>Προτεινόμενη Λύση:</u>



α) Το τρίγωνο $\triangle IAH$ είναι ισοσκελές, με $AI = AH$, αφού το $A\Theta$ είναι ύψος και διχοτόμος. Άρα $\angle AIH = \angle AHI$.
Όμως, $\angle AI\Delta = \angle I\Delta E$ (εντός εναλλάξ) και

$\angle AHI = \angle \Delta HE$ (κατακορυφήν).

Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι $\angle I\Delta E = \angle \Delta HE$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο $\triangle \Delta EH$ είναι ισοσκελές με $\Delta E = HE$.

β) Τα τρίγωνα $\triangle ABZ$ και $\triangle \Delta AI$ είναι ίσα γιατί:

(1) $\angle B = \angle IA\Delta = 90^0$

(2) $AB = A\Delta$

(3) $\angle BAZ = \angle A\Delta I$, γιατί έχουν τις πλευρές κάθετες

Άρα $BZ = AI = AH$. Εξάλλου, $\Delta E = HE$, οπότε $AE = AH + HE = BZ + \Delta E$.

Να απαντήσετε τα θέματα 3,4,5 και 6 **γράφοντας μόνο την τελική απάντηση**. Το κάθε θέμα είναι **5 μονάδες.**

<u>ΘΕΜΑ 3:</u>

Σε μια σακούλα υπάρχουν νομίσματα του ενός και των δύο ευρώ. Κάθε νόμισμα του 1 ευρώ ζυγίζει 7,5 γραμμάρια και κάθε νόμισμα των 2 ευρώ ζυγίζει 8,5 γραμμάρια. Στη σακούλα έχουμε της ίδιας αξίας (σε ευρώ) νομίσματα από τα δύο είδη. Αν το συνολικό βάρος των νομισμάτων είναι 1175 γραμμάρια, να βρείτε τον αριθμό των νομισμάτων του ενός ευρώ, και αυτόν των δύο ευρώ που υπάρχουν στη σακούλα.

<u>Προτεινόμενη Λύση:</u>

Αν τα νομίσματα των δύο ευρώ είναι x τότε τα νομίσματα του ενός ευρώ θα είναι $2x$ αφού είναι ίσης αξίας. Τότε $8,5x + 7,5 \cdot 2x = 1175$. Τότε $23,5x = 1175$ τότε $x = 50$.

<u>Απάντηση:</u> 100 νομίσματα του ενός ευρώ και 50 νομίσματα των δύο ευρώ.

ΘΕΜΑ 4:

Ένας τετραψήφιος αριθμός Χ : $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ έχει διαφορετικά ψηφία και κανένα ψηφίο δεν είναι ίσο με το μηδέν. Σχηματίζουμε τον αριθμό Y: $\overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ αντιστρέφοντας τη σειρά των ψηφίων του Χ. Αν το άθροισμα των Χ και Υ είναι 14773, να βρείτε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του μικρότερου από τους δύο αριθμούς.

Προτεινόμενη Λύση:

Χ : $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$: $X = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta$ ο μεγαλύτερος αριθμός

Y : $\overline{\delta\gamma\beta\alpha}$: $Y = 1000\delta + 100\gamma + 10\beta + \alpha$ ο μικρότερος αριθμός

Τότε $X + Y = 1001\alpha + 110\beta + 110\gamma + 1001\delta = 14773$
Τότε $1001(\alpha + \delta) + 110(\beta + \gamma) = 14773$
Τότε $\alpha + \delta = 13$ και $\beta + \gamma = 16$
Άρα $(\alpha,\delta) = (9,4)\acute{\eta}(8,5)\acute{\eta}(7,6)$ και $(\beta,\gamma) = (9,7)\acute{\eta}(8,8)$

Αφού τα ψηφία είναι διαφορετικά τοτε $(\beta,\gamma) = (9,7)$ και $(\alpha,\delta) = (8,5)$ και αφού θέλουμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του μικρότερου από τους δύο αριθμούς τότε ο αριμός είναι ο 5978 .

Απάντηση: 5978

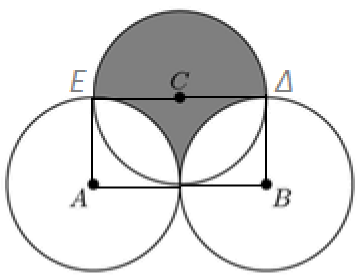
ΘΕΜΑ 5:

Οι κύκλοι *Α, Β* και *C* έχουν ακτίνα 1. Οι κύκλοι *Α* και *Β* εφάπτονται. Ο κύκλος C εφάπτεται στο τμήμα ΑΒ με σημείο επαφής το μέσο του. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής μέσα στον κύκλο C αλλά έξω από τους κύκλους Α και Β.

Προτεινόμενη Λύση:

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο ΑΒΔΕ .
Τότε το σκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο

$$E = \frac{E_C}{2} + E_{AB\Delta E} - \frac{E_A}{4} - \frac{E_B}{4}$$

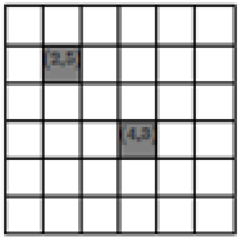


$$E = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 - 2\frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 2\tau.\mu.$$

Απάντηση: 2τ.μ

ΘΕΜΑ 6:

Να βρείτε πόσα ορθογώνια υπάρχουν στη σκακίερα 6x6 που δεν περιέχουν ούτε το κελί (2,5) ούτε το κελί (4,3) (Οι γραμμές και οι στήλες είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το 6.)



Προτεινόμενη Λύση:

Για να υπολογίσουμε όλα τα ορθογώνια στη σκακιέρα, υπάρχουν 1+2+3+4+5+6=21 επιλογές από δεξιά προς αριστερά και το ίδιο 1+2+3+4+5+6=21 από πάνω προς τα κάτω άρα σχηματίζονται 21x21=441 συνολικά ορθογώνια. (Διαφορετικά παίρνοντας 2 κορυφές οριζόντια και 2 κορυφές κάθετα , $\binom{7}{2}\binom{7}{2}=21\cdot 21=441$). Για να υπολογίσουμε τα ορθογώνια που περιέχουν το κελί $(2,5)$, πρέπει η αριστερη πλευρά να είναι πριν το 2, άρα υπάρχουν δύο επιλογές και η δεξιά πλευρά πρέπει να είναι μετά το 2 άρα 5 επιλογές, έτσι υπάρχουν 2x5=10 συνολικά επιλογές. Από πάνω προς τα κάτω υπάρχουν πάλι 10 επιλογές άρα συνολικά σχηματίζονται 10x10=100 ορθογώνια που περιέχουν το κελί $(2,5)$. Όμοια υπολογίζετα και ο αριθμός των ορθογωνίων που περιέχουν το κελί $(4,3)$, ο οποίος είναι 12x12=144 όπως και ο αριθμός των ορθογωνίων που περιέχουν και τα δύο κελιά ο οποίος είναι 6x6=36 . Έτσι τα ορθογώνια που δεν περιέχουν τα δύο κελιά είναι $441-100-144+36=233$.

Απάντηση: 233 ορθογώνια