ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ IMC STAGE II

ΜΑΡΤΗΣ 2018

<u>Χρόνος Εξέτασης:</u> **2ώρες**

<u>Ημερομηνία</u>: ***7/03/2018*** *<u>Ώρα εξέτασης</u>:* ***15:45 -17:45***

Να απαντήσετε τα θέματα 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας. Το κάθε θέμα είναι **10 μονάδες.**

<u>ΘΕΜΑ 1:</u>

α) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}+7\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{24}+6=$$

β) Αν x και y είναι οι λύσεις των εξισώσεων:

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{x} \quad \text{και} \quad \frac{3y-15}{12}=0$$

να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A=3x-y^2+(x+y)(x-y)-(x-2y)^2$$

<u>Προτεινόμενη Λύση:</u>

α) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}+7\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{24}+6=\frac{4-3}{12}\times\frac{1+35}{5}+\frac{2-1}{6}\times\frac{24}{1}+6=$

$$\frac{1}{12}\times\frac{36}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{24}{1}+6=$$

$$\frac{3}{5}+4+6=\frac{53}{5}$$

β) $\frac{2}{3}=\frac{8}{x}$ τότε $\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{x}$ τότε $x=12$

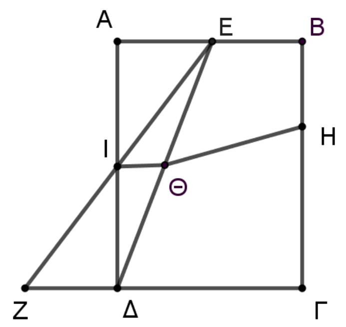
$\frac{3y-15}{12}=0$ τότε $3y-15=0$ τότε $y=5$

$A=3x-y^2+(x+y)(x-y)-(x-2y)^2=$

$$3\times 12-5^2+(12+5)(12-5)-(12-2\times 5)^2=36-25+17\times 7-2^2=126$$

ΘΕΜΑ 2:

Στο σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



Δίνεται ότι ΑΒ = 8cm, ΒΓ = 12cm, ΒΗ = 4 cm, Ι μέσο του ΑΔ και ΖΕ και Ε και Θ μέσα των ΑΒ και ΕΔ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΙΘΔ.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΖΔ.

γ) Να δείξετε ότι (ΖΔ)= 2 (ΙΘ).

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΕΒΗΘ.

Προτεινόμενη Λύση:

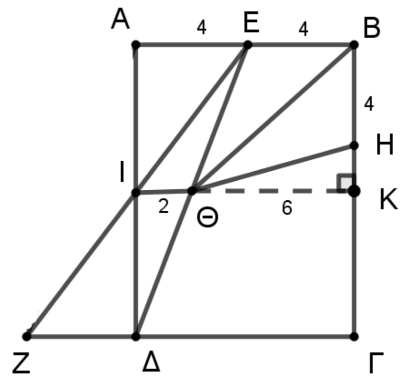
α) $E_{\text{ΑΕΔ}} = \frac{(\text{ΑΕ})(\text{ΑΔ})}{2} = \frac{4 \cdot 12}{2} = 24cm^2$ τότε $E_{\text{ΙΔΕ}} = \frac{1}{2} E_{\text{ΑΕΔ}} = 12cm^2$ τότε

$$E_{\text{ΙΘΔ}} = \frac{1}{2} E_{\text{ΙΔΕ}} = 6cm^2$$

β) $E_{\text{ΖΕΔ}} = 2\text{E}_{\text{ΙΕΔ}} = 2 \cdot 12 = 24cm^2$

γ) $\text{E}_{\text{ΕΖΔ}} = 4 \times E_{\text{ΙΕΘ}}$ τότε $\frac{(\text{ΖΔ}) \cdot 12}{2} = 4 \cdot \frac{(\text{ΙΘ}) \cdot 6}{2}$ τότε $(\text{ΖΔ}) = 2(\text{ΙΘ})$

δ) Φέρουμε την ΘΒ.



$(\text{ΙΘ}) = \frac{1}{2}(\text{ΖΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΕ}) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2cm$ τότε

$(\text{ΘΚ}) = 6cm$

$$\text{E}_{\text{ΕΒΗΘ}} = \text{E}_{\text{ΕΒΘ}} + \text{E}_{\text{ΒΗΘ}}$$

$$= \frac{(\text{ΕΒ})(\text{ΙΑ})}{2} + \frac{(\text{ΒΗ})(\text{ΘΚ})}{2}$$

$$= \frac{4 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2} = 24cm^2$$

Να απαντήσετε τα θέματα 3,4,5 και 6 **γράφοντας μόνο την τελική απάντηση**. Το κάθε θέμα είναι **5 μονάδες.**

<u>ΘΕΜΑ 3:</u>

Σε ένα διαγώνισμα με 50 ερωτήσεις, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 2 μονάδες, ενώ για κάθε λάθος απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα. Αν κάποια ερώτηση δεν απαντηθεί καθόλου, βαθμολογείται με μηδέν μονάδες. Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στο διαγώνισμα του Κώστα, ήταν τετραπλάσιος των λανθασμένων απαντήσεών του. Αν ο Κώστας πήρε στο διαγώνισμα 56 μονάδες, να βρείτε πόσες ασκήσεις δεν απάντησε ο Κώστας.

<u>Προτεινόμενη Λύση:</u>

Έστω ο Κώστας απάντησε λανθασμένα σε x ερωτήσεις, τότε απάντησε σωστά σε $4x$ ερωτήσεις. Αφού η συνολική βαθμολογία ήταν 56 τότε

$2\cdot 4x-1\cdot x=56$ τότε $7x=56$ τότε $x=8$

Τότε ο Κώστας δεν απάντησε σε $50-(4\cdot 8+8)=50-40=10$ ερωτήσεις

<u>Απάντηση:</u> 10 ερωτήσεις

<u>ΘΕΜΑ 4:</u>

Πέντε φίλοι, οι Ανδρέας, Βούλα, Γιώργος, Δήμητρα και Ελένη, κάθονται γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι με σειρά όπως των δεικτών του ρολογιού, για να παίξουν ένα παιγνίδι. Για να αποφασίσουν ποιος θα παίξει πρώτος, ξεκινούν από την φετινή χρονιά, δηλαδή τον αριθμό 2018, και μετρούν προς τα πίσω. Όποιος φτάσει πρώτος στο 1, θα παίξει πρώτος. Ξεκινά λοιπόν ο Ανδρέας με το 2018, ακολουθεί η Βούλα με το 2017, και ούτω καθεξής.

(α) Να βρείτε ποιος από αυτούς θα παίξει πρώτος.

(β) Με τους ίδιους όρους του παιγνιδιού, ποια είναι η πρώτη χρονιά μετά το 2018 κατά την οποία ο Ανδρέας θα παίξει πρώτος;

<u>Προτεινόμενη Λύση:</u>

α) Αφού ο κάθε ένας αφαιρεί 1 ξεκινώντας από τον Αντρέα τότε για να κλείσει ένας γύρος αφαιρούνται 5 από το 2018 έτσι κάθε φορά που έρχεται η σειρά του Αντρέα θα έχει αφαιρεθεί από το 2018 πολλάπλάσιο του 5.
Δηλαδή $2018=5\cdot 403+3$. Άρα θα γίνουν 403 γύροι ,θα αφαιρέσει ο Αντρέας, η Βούλα και ο Γιώργος θα φθάσει πρώτος στο 1.

β) Η χρονιά που ευνοεί τον Αντρέα είναι αυτή που όταν διαιρεθεί με το 5 θα αφήνει υπόλοιπο 1. Άρα είναι η χρονιά 2021

<u>Απάντηση:</u> α) Γιώργος
β) 2021

ΘΕΜΑ 5:

Ο αριθμός $7a38b541c2$, όπου τα a,b,c είναι ψηφία, είναι πολλαπλάσιο του 396. Να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του $a+b+c$.

Προτεινόμενη Λύση:

Αφού ο $7a38b541c2$ είναι πολλαπλάσιο του $396=4\cdot 9\cdot 11$ είναι πολλαπλάσιο και του $4,\ 9,\ 11$

- Αφού ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε το $c2$ είναι πολλαπλάσιο του 4, άρα $c=1,3,5,7\ \acute{\eta}\ 9$
- Αφού ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 9 τότε $7+a+3+8+b+5+4+1+c+2=a+b+c+30$ πολλάλασίο του 9, άρα

  $a+b+c=6,15\ \acute{\eta}\ 24$ αφού $a+b+c\leq 27$
- Αφού ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 11 τότε

  $7-a+3-8+b-5+4-1+c-2=b+c-a-2$ πολλάπλάσιο του 11, άρα

  $b+c-a=-9,\ 2,13$ αφού $-9\leq b+c-a\leq 18$

- Αν $a+b+c=24$ και $c=1,3,5,7\ \acute{\eta}\ 9$ τότε

  $(a,b,c)=(9,6,9)$ ή $(6,9,9)$ ή $(8,7,9)$ ή $(7,8,9)$ ή $(9,8,7)$ ή $(8,9,7)$ όμως

  καμιά τριάδα δεν επαλυθεύει τη σχέση $b+c-a=-9,\ 2,13$

- Αν $a+b+c=15$ και $c=1,3,5,7\ \acute{\eta}\ 9$ τότε υπάρχει τριάδα $(a,b,c)=(1,5,9)$

  που επαληθεύει τη σχέση $b+c-a=-9,\ 2,13$

  Άρα μέγιατη τιμή $a+b+c=15$

Απάντηση: 15

ΘΕΜΑ 6:

Η πλειοψηφία των 30 μαθητών της τάξης αγόρασε μολύβια από το σχολικό βιβλιοπωλείο. Κάθε ένας από αυτούς τους μαθητές αγόρασε τον ίδιο αριθμό μολυβιών και ο αριθμός αυτός ήταν μεγαλύτερος από 1. Το κόστος του κάθε μολυβιού σε σεντ ήταν μεγαλύτερο από τον αριθμό των μολυβιών που αγόρασε κάθε μαθητής. Το συνολικό κόστος των μολυβιών ήταν €32,89. Να βρείτε πόσα μολύβια αγόρασαν συνολικά οι μαθητές.

<u>Προτεινόμενη Λύση:</u>

Έστω $x > 15$ ο αριθμός των μαθητών , $a > 1$ ο αριθμός των μολυβιών που αγόρασε ο κάθε μαθητής και $\beta > \alpha$ το κόστος του κάθε μολυβιού.

Τότε $x \cdot \alpha \cdot \beta = 3289 = 11 \cdot 13 \cdot 23$

Τότε $x = 23$, $\beta = 13$ και $a = 11$

Συνολικά αγοράστηκαν $23 \cdot 11 = 253$

<u>Απάντηση:</u> 253 μολύβια