ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 24/02/2018 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1 : Δίνεται ένα σύνολο θετικών ακεραίων αριθμών $A_1 = \{\nu, \nu+1, \nu+2\}$, όπου ν είναι περιττός αριθμός με $\nu < 2016$. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια σειρά νέων συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots$ με πλήθος στοιχείων τρία το κάθε ένα , έχοντας σε κάθε βήμα τις εξής δύο επιλογές, ξεκινώντας από το A_1:

1η επιλογή : Για να πάρουμε το A_{i+1} επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο αριθμό και τον προσθέτουμε σε δύο από τα στοιχεία του A_i $i = 1,2, \dots$ και το τρίτο στοιχείο του A_i παραμένει το ίδιο και στο σύνολο A_{i+1} . *(Για παράδειγμα αν επιλέξω $\kappa \in \mathbb{N}$ τότε το σύνολο A_2 μπορεί να είναι* $A_2 = \{\nu+\kappa, \nu+1+\kappa, \nu+2\}$.*)*

2η επιλογή : Για να πάρουμε το A_{i+1} επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο αριθμό και τον προσθέτουμε σε ένα από τα στοιχεία του A_i $i = 1,2, \dots$ και τον αφαιρούμε από ένα άλλο από τα στοιχεία του A_i ενώ το τρίτο στοιχείο του A_i παραμένει το ίδιο και στο σύνολο A_{i+1} . *(Για παράδειγμα αν επιλέξω $\mu \in \mathbb{N}$ τότε το σύνολο A_2 μπορεί να είναι $A_2 = \{\nu+\mu, \nu+1, \nu+2-\mu\}$.)*

Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν με αυτή την διαδικασία σε κάποιο βήμα να έχουμε το σύνολο $A_j = \{2016, 2017, 2018\}$.

Πρόβλημα 2 : Δίνονται τα ψηφία 0,1,2,3,4,5. Να βρείτε το άθροισμα όλων των **άρτιων** τριψηφίων αριθμών που σχηματίζονται από αυτά τα ψηφία αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

Πρόβλημα 3: Έστω $\beta_i, i = 1,2,3, \dots, 2018$ θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{\beta_1^3} + \frac{1}{\beta_2^3} + \cdots + \frac{1}{\beta_{2018}^3} = \frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι :

α) Για κάθε ακέραιο $\nu > 1$ ισχύει: $\frac{1}{\nu^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{2}{\nu} + \frac{1}{\nu+1}\right)$

β) Τουλάχιστον τρείς από τους αριθμούς $\beta_i, i = 1,2,3, \dots, 2018$ είναι ίσοι.

Πρόβλημα 4: Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$. Με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε κύκλο (c). Στο μεγαλύτερο από τα δύο τόξα $B\Gamma$ του κύκλου (c) παίρνουμε σημείο Θ και φέρουμε τη χορδή $B\Theta$. Η παράλληλη από το Γ προς την $B\Theta$ τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο K. Έστω Δ, Z, H τα μέσα των τμημάτων $B\Theta, A\Gamma, AK$ αντίστοιχα. Έστω σημείο Π έξω από τον κύκλο και πάνω στην ημιευθεία ΔA και ένα σημείο Σ μέσα στον κύκλο έτσι ώστε το $\Delta Z\Pi\Sigma$ να είναι κυρτό τετράπλευρο με $\Sigma Z = \Delta Z$ κα $\angle\Delta\Sigma\Pi = 150°$. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $Z\Delta H$ είναι ισόπλευρο και

(β) $\angle Z\Pi\Delta = \angle\Delta\Pi\Sigma$