ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 24/02/2018 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$ και για $\nu \geq 3$ ισχύει

$$\alpha_\nu = max\{a_\rho + \alpha_{\nu-\rho} \;:1 \leq \rho \leq \nu - 1\}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) ο γενικός όρος της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \begin{cases} 3k & \gamma\iota\alpha \;\; \nu = 2k \\ 3k+1 & \gamma\iota\alpha \; \nu = 2k+1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

β) $\alpha_{\nu+\mu} = \alpha_\nu + \alpha_\mu$ αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους δείκτες ν, μ είναι άρτιος.

Πρόβλημα 2 : Δίνεται ένας φυσικός αριθμός n. Να αποδείξετε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός m ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του n και έχει ακριβώς n θετικούς διαιρέτες.

Πρόβλημα 3 : Δίνονται δύο κύκλοι $c_1(O, R_1)$ και $c_2(K, R_2)$ με $R_2 > R_1$ οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Από ένα σημείο A του κύκλου c_2 που δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία OK φέρουμε τις εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ προς τον κύκλο c_1 και έστω B, Γ τα αντίστοιχα σημεία επαφής τους με τον c_1. Οι ευθείες $MB, M\Gamma$ τέμνουν τον κύκλο c_2 ξανά στα σημεία E, Z αντίστοιχα. Έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας EZ και της εφαπτομένης του κύκλου c_2 στο σημείο A. Να αποδείξετε ότι $\Lambda M \perp OK$.

Πρόβλημα 4 : Δίνονται 2018 σύνολα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 64 από αυτά, έστω $A_1, A_2, \dots, A_{64}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$A_i \cup A_j \neq A_k \text{ για κάθε } i, j, k \in \{1,2,\dots,64\} \;\mu\varepsilon\; i \neq j, i \neq k,\; j \neq k$$

«Δηλαδή η ένωση κάθε δύο από αυτά τα 64 σύνολα, είναι ένα σύνολο διαφορετικό από κάθε άλλο από αυτά τα 64 σύνολα.»