



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: (α) Στην ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ είναι $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ και ισχύει

$$\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2, \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Να αποδείξετε ότι: $\alpha_n = n^2$, $\forall n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha_{n+1} + \alpha_n - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 4, για κάθε $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Πρόβλημα 2: Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔOAB με $B(6, 0)$, όπου O η αρχή των αξόνων και A στο 1° τεταρτημόριο. Από τυχαίο σημείο $P(2\rho, 0)$ της πλευράς OB ($0 < \rho < 3$) φέρουμε παράλληλη προς την BA , που τέμνει την πλευρά OA στο σημείο M . Αν Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ΔOMP και E το μέσον του AP , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔBDE .

Πρόβλημα 3: Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- Συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f''(x) > 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$
- $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

Πρόβλημα 4: Οι διάμεσοι BD, GE τριγώνου $\Delta AB\Gamma$ τέμνονται στο σημείο θ . Να αποδείξετε ότι: Το τετράπλευρο $AE\theta D$ είναι περιγράψιμο, αν και μόνον αν $AB = A\Gamma$.