



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**Πρόβλημα 1:** Αν ισχύει  $\sin x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$ , να αποδείξετε ότι  $\sin x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sin x$ .

**Πρόβλημα 2:** (α) Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

είναι  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

(β) Δίνεται ότι:  $(x^3 + 1)^3 = 8(2x - 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (1) και  $y = \sqrt[3]{2x - 1}$   $y \in \mathbb{R}$  (2).

(i) Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $x^3 - y^3 = 2(y - x)$ .

(ii) Να βρείτε όλες τις τιμές  $x \in \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

**Πρόβλημα 3:** Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο  $\Delta OAB$  με  $B(6, 0)$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων και  $A$  στο  $1^\circ$  τεταρτημόριο. Από τυχαίο σημείο  $P(2\rho, 0)$  της πλευράς  $OB$  ( $0 < \rho < 3$ ) φέρουμε παράλληλη προς την  $BA$ , που τέμνει την πλευρά  $OA$  στο σημείο  $M$ . Αν  $\Delta$  είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου  $\Delta OMP$  και  $E$  το μέσον του  $AP$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta BDE$ .

**Πρόβλημα 4:** Δίνεται τρίγωνο  $\Delta AB\Gamma$  με πλευρές  $AB = \gamma$ ,  $B\Gamma = \alpha$ ,  $GA = \beta$  και  $\alpha < \beta < \gamma$ .

(ι) Να αποδείξετε ότι  $\angle A < 60^\circ$ .

(ιι) Αν  $\mu$  είναι το μήκος της διαμέσου  $AD$ , να αποδείξετε ότι  $4\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos A$ .

(ιιι) Να αποδείξετε ότι  $\mu^2 > \frac{3\beta\gamma}{4}$ .