ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

<u>Ημερομηνία</u>: 11/11/2017 *<u>Ώρα Εξέτασης</u>: 10:00-12:00*

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ:</u>

1. Να λύσετε <u>όλα</u> τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</u>

<u>Πρόβλημα 1:</u> (α) Στην ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$ είναι $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ και ισχύει

$$\alpha_{\nu+1} - 2\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = 2\,, \qquad \forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Να αποδείξετε ότι: $\alpha_\nu = \nu^2$, $\forall \nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 4, για κάθε $\nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>

(α) Έχουμε

$$\alpha_0 = 0 = 0^2$$
$$\alpha_1 = 1 = 1^2$$
$$\gamma\iota\alpha\ \ \nu = 1:\ \alpha_2 - 2\alpha_1 + \alpha_0 = 2\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha_2 = 4 = 2^2$$
$$\gamma\iota\alpha\ \ \nu = 2:\ \alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1 = 2\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha_3 = 9 = 3^2$$
$$\vdots$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha_\nu = \nu^2$, $\forall \nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ και θα το αποδείξουμε επαγωγικά.

Έστω ότι

$$\alpha_\nu = \nu^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha_{\nu-1} = (\nu - 1)^2$$

τότε, έχουμε

$$\alpha_{\nu+1} - 2\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = 2 + 2\nu^2 - (\nu-1)^2 = 2 + 2\nu^2 - \nu^2 + 2\nu - 1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_{\nu+1} = \nu^2 + 2\nu + 1 = (\nu+1)^2$$

Επομένως, $\alpha_\nu = \nu^2$, $\forall \nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(β) Θα έχουμε

$$\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu - 1 = (\nu+1)^2 + \nu^2 - 1 = 2\nu^2 + 2\nu = 2\nu(\nu+1)$$

Όμως το γινόμενο $\nu(\nu+1)$ διαιρείται με το 2 ως γινόμενο διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Επομένως, $\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu - 1 = \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 4$.

<u>Πρόβλημα 2:</u> Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔOAB με $B(6, 0)$, όπου O η αρχή των αξόνων και A στο 1^{o} τεταρτημόριο. Από τυχαίο σημείο $P(2\rho, 0)$ της πλευράς OB $(0 < \rho < 3)$ φέρουμε παράλληλη προς την BA, που τέμνει την πλευρά OA στο σημείο M. Αν Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ΔOMP και E το μέσον του AP, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta B\Delta E$.

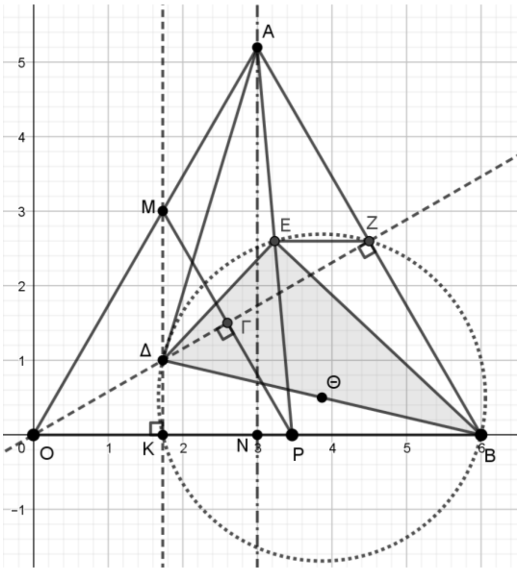
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Έστω N το μέσον του OB και Z το μέσον του AB. Αφού το τρίγωνο $\varDelta AOB$ είναι ισοσκελές έχουμε

$$AE^2 = OA^2 - ON^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Longrightarrow AN = 3\sqrt{3}$$

Επομένως οι συντεταγμένες του A είναι $A\left(3,3\sqrt{3}\right)$.
και οι συντεταγμένες του E είναι

$$E\left(\frac{3+2\rho}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$



Το τρίγωνο $\varDelta OMP$ είναι ισόπλευρο και έστω K το μέσον του OP. Έχουμε

$$MK^2 = OM^2 - OK^2 = 4\rho^2 - \rho^2 = 3\rho^2 \Rightarrow$$
$$MK = \rho\sqrt{3}$$

Αφού το σημείο $\varDelta$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του $\varDelta OMP$ θα έχουμε

$$\varDelta K = \frac{1}{3}MK = \frac{\rho\sqrt{3}}{3}$$

Άρα

$$\varDelta\left(\rho,\frac{\rho\sqrt{3}}{3}\right)$$

Για τις κλίσεις των ευθειών $\varDelta E, BE$ θα έχουμε

$$\lambda_{\varDelta E} = \frac{\dfrac{\rho\sqrt{3}}{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{\rho - \dfrac{3+2\rho}{2}} = -\frac{\sqrt{3}(2\rho-9)}{9}$$

και

$$\lambda_{EB} = \frac{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3+2\rho}{2} - 6} = \frac{3\sqrt{3}}{2\rho-9} = \frac{9}{\sqrt{3}(2\rho-9)}$$

Επομένως

$$\lambda_{\varDelta E}\cdot\lambda_{EB} = -1 \Longrightarrow \varDelta E \perp EB \Longrightarrow \angle\varDelta EB = 90°.$$

Επίσης έχουμε ότι το τρίγωνο $\varDelta\varDelta ZB$ είναι ορθογώνιο στο Z. Αν $\varTheta$ το μέσον της υποτείνουσας $\varDelta B$ συμπεραίνουμε ότι $\varTheta Z = \varTheta E = \varTheta\varDelta = \varTheta B$. Άρα τα σημεία $\varDelta, E, Z, B$ βρίσκονται πάνω σε κύκλο με κέντρο $\varTheta$ και ακτίνα $\varTheta Z$.
Επειδή τα σημεία E, Z είναι μέσα των τμημάτων AP, AB αντίστοιχα θα έχουμε ότι $EZ \parallel OB$.
Επομένως,

$$\angle EZ\varDelta = \angle EZO = 30°$$

Όμως

$$\angle EZ\varDelta = \angle EB\varDelta \text{ (εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο)}$$

Επομένως, $\angle EB\varDelta = 30°$ και $\angle E\varDelta B = 60°$.

Πρόβλημα 3: Έστω συνάρτηση $f\colon[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- Συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- Δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f''(x) > 0,\ \forall x \in (\alpha,\beta)$
- $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Από το θεώρημα του *Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha,\beta)$ με

$$\alpha < \rho_1 < \rho_2 < \beta \qquad \kappa\alpha\iota \quad f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0.$$

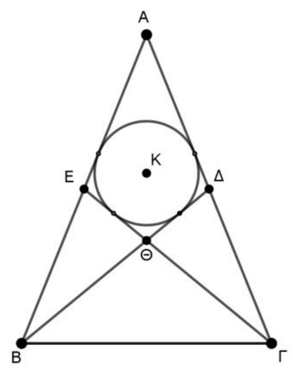
Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, \rho_1]$ και $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως έχουμε

- Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, \rho_1)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi_1) = \frac{f(\rho_1) - f(a)}{\rho_1 - a} = -\frac{f(a)}{\rho_1 - a}$$
και αφού από την υπόθεση $f(\alpha) < 0$, θα έχουμε
$$f'(\xi_1) > 0$$
- Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi_2) = \frac{f(\rho_2) - f(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} = 0$$

Άρα,
$$\mu\varepsilon \;\; \xi_1 < \xi_2 \;\; \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \;\; f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$$
αυτό όμως είναι άτοπο αφού από την υπόθεση $f''(x) > 0, \;\; \forall x \in (\alpha, \beta)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι αύξουσα στο (α, β), δηλαδή
$$\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) \; \mu\varepsilon \; x_1 < x_2 \; \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \;\; f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

<u>Πρόβλημα 4:</u> Οι διάμεσοι $B\Delta, \Gamma E$ τριγώνου $\Delta AB\Gamma$ τέμνονται στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι: Το τετράπλευρο $AE\Theta\Delta$ είναι περιγράψιμο, αν και μόνον αν $AB = A\Gamma$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>



($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι $AB = A\Gamma$. Τότε αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές θα έχουμε
$$AE = A\Delta \quad (1)$$
Επίσης,
$$B\Delta = \Gamma E \Rightarrow \Theta\Delta = \Theta E \;\; (2)$$
Από τις (1), (2) παίρνουμε
$$AE + \Theta\Delta = A\Delta + \Theta E$$
Άρα, το τετράπλευρο $AE\Theta\Delta$ είναι περιγράψιμο.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι το τετράπλευρο $AE\Theta\Delta$ είναι περιγράψιμο, τότε
$$AE + \Theta\Delta = A\Delta + \Theta E \quad (3)$$
Αν ονομάσουμε $AB = \gamma, A\Gamma = \beta, B\Delta = \mu_\beta, \Gamma E = \mu_\gamma$
η (3) γίνεται
$$\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{3}\mu_\beta = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\mu_\gamma \quad (4)$$
Επίσης θα έχουμε
$$E = E_{AB\Delta} = E_{A\Gamma E} = \frac{1}{2}E_{AB\Gamma}$$
και αφού έχουν τα τρίγωνα $\Delta AB\Delta, \Delta A\Gamma E$ έχουν τον ίδιο εγγεγραμμένο κύκλο ακτίνας έστω ρ, θα έχουμε,
$$E = \tau_1\rho \quad \kappa\alpha\iota \quad E = \tau_2\rho$$
όπου τ_1, τ_2 είναι οι ημιπερίμετρος των τριγώνων $\Delta AB\Delta, \Delta A\Gamma E$ αντίστοιχα. Επομένως θα έχουμε $\tau_1 = \tau_2$. Άρα
$$A\Delta + \Delta B + AB = AE + E\Gamma + \Gamma A \Longrightarrow \frac{1}{2}\beta + \mu_\beta + \gamma = \frac{1}{2}\gamma + \mu_\gamma + \beta \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{2}\gamma + \mu_\beta = \frac{1}{2}\beta + \mu_\gamma \qquad (5)$$
Αφαιρώντας τις (4), (5) παίρνουμε
$$\frac{2}{3}\mu_\beta = \frac{2}{3}\mu_\gamma \Longrightarrow \mu_\beta = \mu_\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow AB = A\Gamma.$$