ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = A - \frac{1}{2}$, αν

$$A = \frac{1}{7^{-2017}+1} + \frac{1}{7^{-2016}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{0}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{2016}+1} + \frac{1}{7^{2017}+1}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$A = \frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \ldots + \frac{1}{1+1} + \ldots + \frac{1}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2017}}$$

$$= \left(\frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{1}{1+7^{2017}}\right) + \left(\frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2016}}\right) + \ldots + \left(\frac{7^{1}}{1+7^{1}} + \frac{1}{1+7^{1}}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 1+1+\ldots+1+\frac{1}{2} = 2017+\frac{1}{2} \quad \text{τότε} \quad A = 2017+\frac{1}{2}$$

$$B = A - \frac{1}{2} = 2017 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2017$$

Πρόβλημα 2

Αν $\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^0}-1\right)=a^a-1$, να υπολογίσετε το a .

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζοντας ανά δύο ξεκινώντας από το τέλος προκύπτει διαφορά δύο τετραγώνων.

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\left[\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^0}-1\right)\right]=$$

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\left[\left(2^{2^1}+1\right)\left(2^{2^1}-1\right)\right]=$$

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left[\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^2}-1\right)\right]=$$

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left[\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^3}-1\right)\right]=$$

Μ

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^5}-1\right)=\left(2^{2^6}-1\right)$$

Τότε $2^{2^6}-1=a^a-1$ τότε $2^{64}=a^a$ τότε $16^{16}=a^a$ τότε $a=16$

Πρόβλημα 3

Τρεις φίλοι, ο Άρης, ο Ερμής και η Αθηνά πήραν μέρος σε ένα διαγωνισμό Μαθηματικού κουίζ 100 προβλημάτων. Ο Άρης και η Αθηνά έλυσαν σωστά 55 προβλήματα ο κάθε ένας και ο Ερμής έλυσε σωστά 70 προβλήματα. Με το τέλος του διαγωνισμού ένα πρόβλημα του κουίζ χαρακτηρίστηκε δύσκολο αν λύθηκε σωστά μόνο από ένα από τους πιο πάνω μαθητές και εύκολο αν λύθηκε σωστά και από τους τρεις. Να βρείτε πόσα περισσότερα ήταν τα δύσκολα προβλήματα από τα εύκολα.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω Δ το πλήθος των προβλημάτων που λύθηκαν σωστά μόνο από ένα μαθητή, Μ το πλήθος των προβλημάτων που λύθηκαν από 2 μαθητές και Ε το πλήθος των προβλημάτων που λύθηκαν και από τους τρεις .

Τότε:

$\Delta+\mathrm{M}+\mathrm{E}=100 \quad (1)$

$1\cdot\Delta+2\cdot\mathrm{M}+3\cdot\mathrm{E}=2\times55+70 \quad (2)$

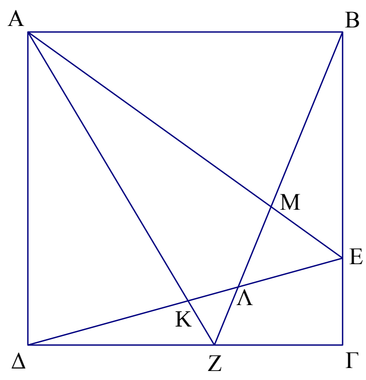
Από (1) και (2) τότε

$2\left(\Delta+\mathrm{M}+\mathrm{E}\right)-\left(1\cdot\Delta+2\cdot\mathrm{M}+3\cdot\mathrm{E}\right)=2\times100-180$

$\Delta-\mathrm{E}=20$

Άρα τα δύσκολα προβλήματα είναι 20 περισσότερα από τα εύκολα.

Πρόβλημα 4



Δίνεται τετράγωνο *ΑΒΓΔ*. Τα *Ε* και *Ζ* είναι σημεία των πλευρών *ΒΓ* και *ΔΓ* αντίστοιχα, *Μ* είναι το σημείο τομής των *ΑΕ* και *ΒΖ*, *Κ* είναι το σημείο τομής των *ΑΖ* και *ΔΕ* και *Λ* είναι το σημείο τομής των *ΒΖ* και *ΔΕ*. Το τετράπλευρο *ΑΚΛΜ* έχει εμβαδόν 26 cm^2 και τα τρίγωνα *ΒΕΜ* και *ΔΚΖ* έχουν εμβαδόν 10 cm^2 και 5 cm^2 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου *ΓΕΛΖ*.

Προτεινόμενη Λύση

Στα τρίγωνα *ΑΒΖ* και *ΑΔΒ* το ύψος που αντιστοιχεί στις πλευρές του τετραγώνου *ΑΒ* και *ΑΔ* αντίστοιχα, είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου.

Άρα: $E_{ABZ} = E_{A\Delta E} = \frac{1}{2} E_{AB\Gamma\Delta} \Longrightarrow E_{ABZ} + E_{A\Delta E} = E_{AB\Gamma\Delta}$ (1)

Αθροίζοντας τα χωρία μέσα στα τρίγωνα *ΑΒΖ* και *ΑΔΕ* βρίσκουμε:

$$E_{ABZ} = E_{ABM} + 26 + E_{K\Lambda Z} \quad (2)$$

$$E_{A\Delta E} = E_{A\Delta K} + 26 + E_{ME\Lambda} \quad (3)$$

Αθροίζοντας τώρα τα χωρία μέσα στο τετράγωνο *ΑΒΓΔ* βρίσκουμε:

$$E_{AB\Gamma\Delta} = E_{A\Delta K} + E_{ABM} + 26 + 10 + 5 + E_{ME\Lambda} + E_{K\Lambda Z} + E_{\Gamma E\Lambda Z} \quad (4)$$

Από τις (1), (2), (3) και (4) παίρνουμε:

$$E_{A\Delta K} + E_{ABM} + 26 + 10 + 5 + E_{ME\Lambda} + E_{K\Lambda Z} + E_{\Gamma E\Lambda Z} = E_{ABM} + 26 + E_{K\Lambda Z}$$
$$+ E_{A\Delta K} + 26 + E_{ME\Lambda}$$

Άρα: $E_{\Gamma E\Lambda Z} = 26 - 15 = 11 cm^2$