	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017** **Β' ΛΥΚΕΙΟΥ** *Ημερομηνία: 11/11/2017* *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: Αν ισχύει $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Από την δεδομένη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$$

παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0, \eta\mu x \neq 0$. Επομένως έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sqrt{2}\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon\varphi x = \sqrt{2}\,\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \qquad (1)$$

Από την (1) έχουμε,

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x.$$

Πρόβλημα 2: (α) Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

είναι $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(β) Δίνεται ότι: $(x^3+1)^3 = 8(2x-1),\ x \in \mathbb{R}$ (1) και $y = \sqrt[3]{2x-1}$ $y \in \mathbb{R}$ (2).

(i) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $x^3 - y^3 = 2(y-x)$.

(ii) Να βρείτε όλες τις τιμές $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Η εξίσωση $x^3 - 2x + 1 = 0$ γράφεται

$$x^3 - 2x + 1 = x^3 - x - x + 1 = x(x^2-1) - (x-1) = x(x-1)(x+1) - (x-1)$$
$$= (x-1)[x(x+1)-1] = (x-1)(x^2+x-1)$$

Άρα ,

$$(x-1)(x^2+x-1)=0 \Longrightarrow x_1=1, \qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(β) (i) Από τις (1) $και$ (2) έχουμε $(x^3+1)^3=8y^3 \Leftrightarrow x^3+1=2y$ και

$$y^3=2x-1 \Leftrightarrow y^3+1=2x.$$

Αφαιρώντας τις τελευταίες εξισώσεις θα έχουμε

$$x^3-y^3=2(y-x).$$

(ii) Από την εξίσωση $x^3-y^3=2(y-x)$ παίρνουμε

$$x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)+2(x-y)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

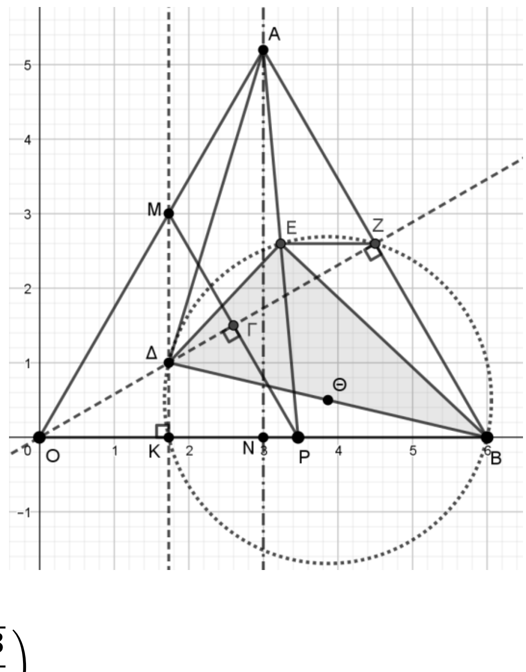
- Αν $x=y$, τότε η εξίσωση $(x^3+1)^3=8y^3$ γράφεται $x^3+1=2x \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow$ $x_1=1,\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- Για τον παράγοντα x^2+xy+y^2+2 έχουμε

$$x^2+xy+y^2+2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+2>0$$

Επομένως οι ρίζες της (1) είναι $x_1,\ x_2,\ x_3$.

<u>Πρόβλημα 3:</u> Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $\varDelta OAB$ με $B(6,0)$, όπου O η αρχή των αξόνων και A στο 1$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο. Από τυχαίο σημείο $P(2\rho,0)$ της πλευράς OB $(0<\rho<3)$ φέρουμε παράλληλη προς την BA, που τέμνει την πλευρά OA στο σημείο M. Αν $\varDelta$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου $\varDelta OMP$ και E το μέσον του AP, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\varDelta B\varDelta E$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>



Έστω N το μέσον του OB και Z το μέσον του AB. Αφού το τρίγωνο $\varDelta AOB$ είναι ισοσκελές έχουμε

$$AE^2=OA^2-ON^2=6^2-3^2=27 \Longrightarrow AN=3\sqrt{3}$$

Επομένως οι συντεταγμένες του A είναι $A\left(3{,}3\sqrt{3}\right)$. και οι συντεταγμένες του E είναι

$$E\left(\frac{3+2\rho}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Το τρίγωνο $\varDelta OMP$ είναι ισόπλευρο και έστω K το μέσον του OP. Έχουμε

$$MK^2=OM^2-OK^2=4\rho^2-\rho^2=3\rho^2 \Rightarrow$$
$$MK=\rho\sqrt{3}$$

Αφού το σημείο $\varDelta$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του $\varDelta OMP$ θα έχουμε

$$\varDelta K=\frac{1}{3}MK=\frac{\rho\sqrt{3}}{3}$$

Άρα

$$\varDelta\left(\rho,\frac{\rho\sqrt{3}}{3}\right)$$

Για τις κλίσεις των ευθειών $\varDelta E, BE$ θα έχουμε

$$\lambda_{\varDelta E}=\frac{\frac{\rho\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\rho-\frac{3+2\rho}{2}}=-\frac{\sqrt{3}(2\rho-9)}{9}$$

και

$$\lambda_{EB} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+2\rho}{2} - 6} = \frac{3\sqrt{3}}{2\rho - 9} = \frac{9}{\sqrt{3}(2\rho - 9)}$$

Επομένως

$$\lambda_{\Delta E} \cdot \lambda_{EB} = -1 \Longrightarrow \Delta E \perp EB \Longrightarrow \angle \Delta EB = 90°.$$

Επίσης έχουμε ότι το τρίγωνο $\triangle \Delta ZB$ είναι ορθογώνιο στο Z. Αν Θ το μέσον της υποτείνουσας ΔB συμπεραίνουμε ότι $\Theta Z = \Theta E = \Theta\Delta = \Theta B$. Άρα τα σημεία Δ, E, Z, B βρίσκονται πάνω σε κύκλο με κέντρο Θ και ακτίνα ΘZ.

Επειδή τα σημεία E, Z είναι μέσα των τμημάτων AP, AB αντίστοιχα θα έχουμε ότι $EZ \parallel OB$.

Επομένως,

$$\angle EZ\Delta = \angle EZO = 30°$$

Όμως

$$\angle EZ\Delta = \angle EB\Delta \ \text{(εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο)}$$

Επομένως, $\angle EB\Delta = 30°$ και $\angle E\Delta B = 60°$.

<u>Πρόβλημα 4:</u> Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με πλευρές $AB = \gamma, B\Gamma = \alpha, \Gamma A = \beta$ και $\alpha < \beta < \gamma$.

(ι) Να αποδείξετε ότι $\angle A < 60^0$.

(ιι) Αν μ είναι το μήκος της διαμέσου $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $4\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

(ιιι) Να αποδείξετε ότι $\mu^2 > \frac{3\beta\gamma}{4}$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>

(ι) Από την ανισότητα $\alpha < \beta < \gamma$ θα έχουμε

$$\alpha < \beta < \gamma \Longrightarrow \angle A < \angle B < \angle \Gamma$$

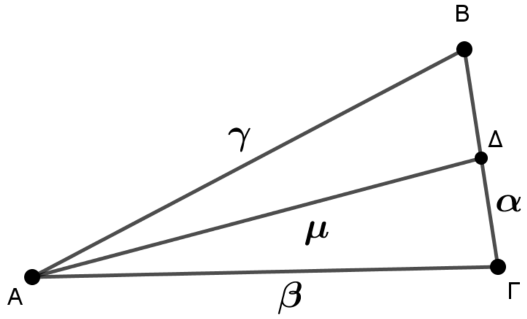
Άρα

$$\begin{cases} \angle A < \angle B \\ \angle A < \angle \Gamma \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες θα έχουμε

$$2(\angle A) < \angle B + \angle \Gamma = 180° - \angle A \Longrightarrow 3(\angle A) < 180° \Longrightarrow \angle A < 60^0.$$

(ιι) Εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$ και $\triangle A\Delta B$ θα έχουμε



$$\mu^2 = \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 2\frac{\alpha\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\mu^2 = \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 2\frac{\alpha\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu B$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$2\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B)$$

Στην τελευταία εξίσωση εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο$\triangle AB\Gamma$. Έχουμε

$$2\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\left(\beta\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} + \gamma\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}\right) \Leftrightarrow 2\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 4\mu^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 4\mu^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A) \Leftrightarrow$$

$$4\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

(ιιι) Επειδή $\angle A < 60^0 \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu A > \frac{1}{2}$, επομένως από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε

$$\mu^2 > \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} + 2\beta\gamma\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\mu^2 > \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$$

επίσης ισχύει

$$\beta^2 + \gamma^2 > 2\beta\gamma \quad (\beta \neq \gamma)$$

Άρα ,

$$4\mu^2 > \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma > 2\beta\gamma + \beta\gamma \Leftrightarrow 4\mu^2 > 3\beta\gamma \Leftrightarrow \mu^2 > \frac{3\beta\gamma}{4}.$$