ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

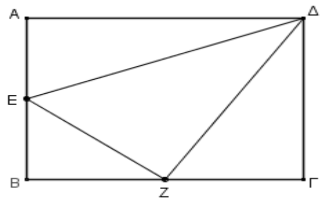
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο. Το $Ζ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$ και το $Ε$ το μέσο της $ΑΒ$. Αν η πλευρά $ΒΓ$ έχει μήκος 16cm και το $ΕΖ$ έχει μήκος 10cm να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΕΖ$.



Προτεινόμενη Λύση

$ΒΓ = 16\ cm \Longrightarrow ΒΖ = 8\ cm$
$ΕΖ = 10\ cm$
Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε $ΒΕ = 6cm$.
Άρα $ΑΒ = 12\ cm$.
$E_{ΑΒΓΔ} = 12 \cdot 16 = 192\ cm^2$
$E_{ΑΔΕ} = \dfrac{6 \cdot 16}{2} = 48\ cm^2$
$E_{ΕΒΖ} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$
$E_{ΔΖΓ} = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48\ cm^2$
Άρα
$E_{ΔΕΖ} = 192 - 48 - 24 - 48 = 72\ cm^2$

Πρόβλημα 2

Ο Αντρέας, ο Βασίλης , ο Κώστας, η Δέσποινα και η Ελένη μοιράζονται ένα μπουκάλι χυμό πορτοκαλιού. Ο Αντρέας παίρνει πρώτος το μπουκάλι, και καθώς βάζει χυμό στο ποτήρι του, χύνει έξω 10ml χυμού. Όταν το ποτήρι του και το μπουκάλι έχουν την ίδια ποσότητα χυμού, δίνει το μπουκάλι στον επόμενο. Ομοίως, ο Βασίλης, ο Κώστας, η Δέσποινα και η Ελένη χύνουν έξω 10ml χυμού καθώς βάζουν τη δική τους μερίδα, και ο κάθε ένας σταματά να βάζει χύμο όταν το ποτήρι του και το μπουκάλι έχουν την ίδια ποσότητα χυμού. Αν κάθε άτομο βάζει χυμό στο ποτήρι του με τη σειρά και στο τέλος παραμένει 10ml χυμού στη μπουκάλα, να βρείτε πόσα ml χυμού ήταν αρχικά στο μπουκάλι.

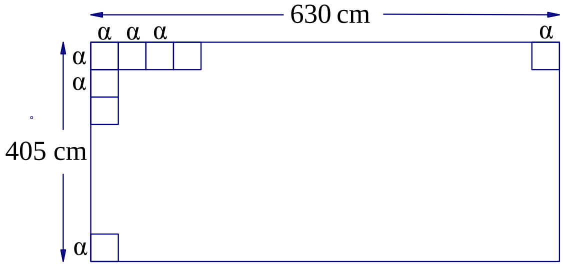
Προτεινόμενη Λύση

Αν ξεκινήσουμε από το τέλος τοτε η Ελένη βάζει 10ml, η Δέσποινα 30ml ($2\times 10+10$),
ο Κώστας 70ml ($2\times 30+10$), ο Βασίλης 150ml ($2\times 70+10$) και ο Αντρέας 310ml ($2\times 150+10$)
και άρα η μπουκάλα έχει 630ml ($2\times 310+10$).

Πρόβλημα 3

Το πάτωμα μιας αίθουσας είναι ορθογώνιο με διαστάσεις 6,30 m και 4,05 m. Θέλουμε να το καλύψουμε με τετράγωνα πλακάκια όλα ίσα μεταξύ τους με πλευρά α cm, α φυσικός αριθμός. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός πλακακιών που μπορεί να τοποθετηθεί στο πάτωμα της αίθουσας;

Προτεινόμενη Λύση



Για να χωρέσουν τα πλακάκια κατά μήκος του πατώματος πρέπει το α να διαιρεί το 630 και για να χωρέσουν κατά πλάτος της αίθουσας πρέπει το α να διαιρεί και το 405. Για να καλύψουμε το πάτωμα με όσο το δυνατό λιγότερα πλακάκια πρέπει το α να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο. Δηλαδή πρέπει να ισούται με τον Μ.Κ.Δ των αριθμών 630 και 405.
Υπολογίζουμε:

$$630 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\,,\quad 405 = 3^4\cdot 5 \Rightarrow \alpha = \text{Μ.Κ.Δ}(630,405) = 3^2\cdot 5 = 45\,\text{cm}$$

Κατά μήκος της αίθουσας χωράει $630:45=14$ πλακάκια
Κατά πλάτος της αίθουσας χωράει $405:45=9$ πλακάκια
Άρα ο ελάχιστος αριθμός τετράγωνων πλακακιών με πλευρά φυσικό αριθμό σε cm, που μπορεί να καλύψει το πάτωμα της αίθουσας είναι $14\cdot 9=126$.

Πρόβλημα 4

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = A - \frac{1}{2}$, αν

$$A = \frac{1}{7^{-2017}+1} + \frac{1}{7^{-2016}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{0}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{2016}+1} + \frac{1}{7^{2017}+1}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$A = \frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \ldots + \frac{1}{1+1} + \ldots + \frac{1}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2017}}$$

$$= \left(\frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{1}{1+7^{2017}}\right) + \left(\frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2016}}\right) + \ldots + \left(\frac{7^{1}}{1+7^{1}} + \frac{1}{1+7^{1}}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 1+1+\ldots+1+\frac{1}{2} = 2017+\frac{1}{2} \quad \text{τότε} \quad A = 2017+\frac{1}{2}$$

$$B = A - \frac{1}{2} = 2017 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2017$$