ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: (α) Να απλοποιήσετε το κλάσμα

$$A=\frac{(\nu^5-10\nu^3+9\nu)(\nu^2-4)}{\nu^2+3\nu},\qquad \nu\in\mathbb{N}$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο A διαιρείται με το 12 για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}A=\frac{(\nu^5-10\nu^3+9\nu)(\nu^2-4)}{\nu^2+3\nu}&=\frac{\nu(\nu^4-10\nu^2+9)(\nu-2)(\nu+2)}{\nu(\nu+3)}\\&=\frac{\nu(\nu^2-9)(\nu^2-1)(\nu-2)(\nu+2)}{\nu(\nu+3)}\\&=\frac{\nu(\nu-3)(\nu+3)(\nu-1)(\nu+1)(\nu-2)(\nu+2)}{\nu(\nu+3)}\\&=(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)(\nu+1)(\nu+2).\end{aligned}$$

(β) Επειδή οι αριθμοί $(\nu-3),(\nu-2),(\nu-1)$ είναι τρείς διαδοχικοί αριθμοί δύο τουλάχιστον από αυτούς διαιρούνται με το 2 και ένας διαιρείται με το 3. Επομένως θα έχουμε ότι

$$(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon(\,2\cdot 3)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 6.$$

Επίσης οι αριθμοί $(\nu+1),(\nu+2)$ είναι δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Επομένως ένας από αυτούς διαιρείται με το 2, δηλαδή

$$(\nu+1)(\nu+2)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 2$$

Άρα,

$$(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)(\nu+1)(\nu+2)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon(\,6\cdot 2)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 12.$$

Πρόβλημα 2: Αν ισχύει $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=\sqrt{2}\eta\mu x$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\varepsilon\varphi x=\sqrt{2}-1$

(β) $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Από την δεδομένη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$$

παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0, \eta\mu x \neq 0$. Επομένως έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sqrt{2}\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon\varphi x = \sqrt{2}\,\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \qquad (1)$$

(β) Από την (1) έχουμε,

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x.$$

<u>Πρόβλημα 3:</u> (α) Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

είναι $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(β) Δίνεται ότι: $(x^3+1)^3 = 8(2x-1),\ x \in \mathbb{R}$ $\quad(1)$ και $y = \sqrt[3]{2x-1} \quad y \in \mathbb{R}$ $\quad(2)$.

(i) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $x^3 - y^3 = 2(y-x)$.

(ii) Να βρείτε όλες τις τιμές $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>

(α) Η εξίσωση $x^3 - 2x + 1 = 0$ γράφεται

$$x^3 - 2x + 1 = x^3 - x - x + 1 = x(x^2-1) - (x-1) = x(x-1)(x+1) - (x-1)$$
$$= (x-1)[x(x+1)-1] = (x-1)(x^2+x-1)$$

Άρα ,

$$(x-1)(x^2+x-1) = 0 \Longrightarrow x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(β) (i) Από τις (1) $και$ (2) έχουμε $(x^3+1)^3 = 8y^3 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 2y$ και

$$y^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x.$$

Αφαιρώντας τις τελευταίες εξισώσεις θα έχουμε

$$x^3 - y^3 = 2(y-x).$$

(ii) Από την εξίσωση $x^3 - y^3 = 2(y-x)$ παίρνουμε

$$x^3 - y^3 = 2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) + 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2+2) = 0$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- Αν $x = y$, τότε η εξίσωση $(x^3+1)^3 = 8y^3$ γράφεται $x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- Για τον παράγοντα $x^2 + xy + y^2 + 2$ έχουμε

$$x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$$

Επομένως οι ρίζες της (1) είναι $x_1,\ x_2,\ x_3$.

<u>Πρόβλημα 4:</u> Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ.$ Έστω σημείο M πάνω στην πλευρά $ΒΓ$ του τετραγώνου. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle ΔAM$ τέμνει την πλευρά $ΔΓ$ στο σημείο N. Από το σημείο N φέρουμε κάθετη ευθεία προς την AM η οποία τέμνει την ευθεία AB στο σημείο H. Να αποδείξετε ότι $AH = BM + ΔN$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>

Αφού η AN είναι διχοτόμος της $\angle\Delta AN$ και από την υπόθεση $N\Delta \perp A\Delta, NZ \perp AM$, θα έχουμε ότι

$$\Delta N = NZ \quad (1)$$

Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle A\Delta N, \triangle ANZ$ παίρνουμε ότι

$A\Delta = AZ$ και άρα $AB = A\Delta = AZ \quad (2)$

Επίσης

$$\begin{cases} \angle AMB = 90° - \angle MAB \\ \angle ZHA = 90° - \angle MAB \end{cases} \Rightarrow \angle AMB = \angle ZHA \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AMB$ $και$ $\triangle AZH$ είναι ίσα. Επομένως

$$ZH = BM \quad (4)$$

Όμως το τρίγωνο $\triangle ANH$ είναι ισοσκελές, αφού

$$\begin{cases} \angle ANH = \angle \Delta NA = 90° - \angle \Delta AN \\ \angle NAH = 90° - \angle \Delta AN \end{cases} \Rightarrow \angle ANH = \angle NAH \quad (5)$$

Επομένως θα έχουμε

$$AH = HN = HZ + ZN = BM + \Delta N.$$