



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ  
ΔΗΜΟΤΙΚΟ

Κωδικός: DIM2017-10  
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

(α) Να υπολογίσετε το γινόμενο:

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{1440}\right)$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) + \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \cdots + \frac{4026}{4028} + \frac{4028}{4030}\right)$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{1440}\right) \\ &= \frac{\cancel{2}}{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} \cdots \frac{1441}{1440} \\ &= \frac{1441}{2} \end{aligned}$$

(β) Πρώτα, απλοποιούμε τα κλάσματα της δεύτερης παρένθεσης του αθροίσματος:

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \cdots + \frac{4026}{4028} + \frac{4028}{4030} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{2013}{2014} + \frac{2014}{2015}$$

Υπολογίζουμε τώρα το ζητούμενο άθροισμα:

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{2013}{2014} + \frac{2014}{2015}\right) \\ &= (1 + 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2014} + \frac{2013}{2014}\right) + \left(\frac{1}{2015} + \frac{2014}{2015}\right) \\ &= 2 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{2014 \text{ προσθετέοι}} \\ &= 2 + 2014 = 2016 \end{aligned}$$