

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**ΙΗ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2017**

30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017



**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ &
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

www.cms.org.cy

**ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH**

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2017**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΕΚΔΟΣΗ**



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

ΙΗ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 30/04/2017

ΔΟΚΙΜΙΟ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Σωστή συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

Λανθασμένη συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

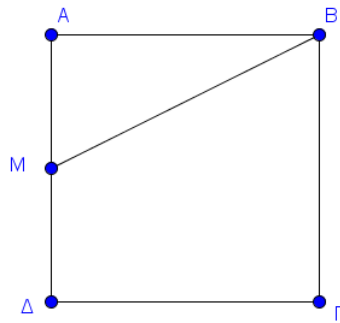
1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. Το σύνολο A έχει 30 στοιχεία και το σύνολο B έχει 25 στοιχεία. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός στοιχείων που θα μπορούσε να περιέχει η ένωση $A \cup B$ των A και B ;

A. 30 B. 55 Γ. 5 Δ. 25 E. 750

2. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο και το M είναι το μέσο της πλευράς $A\Delta$. Ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ABM προς το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με:



A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ Γ. $\frac{1}{6}$ Δ. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{8}$

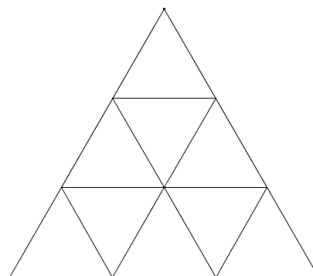
3. Αν $a * b = ab + b$, τότε το $5 * (4 * (3 * (2 * 1)))$ ισούται με:

A. 60 B. 120 Γ. 240 Δ. 360 E. 720

4. Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $f(3x - 2) = x^2 + 2x - 1$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x . Το $f(7)$ ισούται με:

A. 14 B. 16 Γ. 62 Δ. 7 E. 398

5. Το πλήθος των τριγώνων του πιο κάτω σχήματος ισούται με:



A. 9 B. 10 Γ. 11 Δ. 12 E. 13

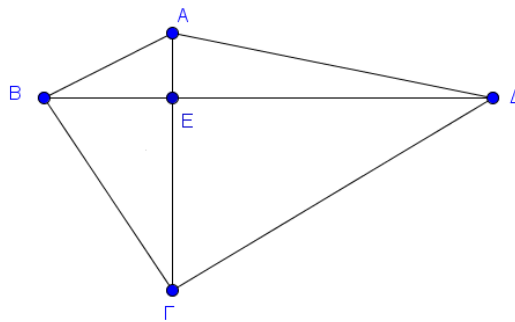
6. Το σημείο $(4, 1)$ ανήκει σε μια ευθεία (ε) με κλίση 3. Ποιο από τα πιο κάτω σημεία ανήκει επίσης στην ευθεία (ε) ;

A. $(6, 3)$ B. $(6, 7)$ Γ. $(3, -1)$ Δ. $(5, 5)$ E. Κανένα από τα προηγούμενα

7. Σε ένα τμήμα που ο καθηγητής έκανε διαγώνισμα, το 10 % των μαθητών είχαν βαθμό A στο πρώτο τετράμηνο. Ο μέσος όρος του γραπτού ήταν 84. Όλοι οι μαθητές που είχαν βαθμό A πήραν τον ίδιο βαθμό και οι υπόλοιποι πήραν μέσο όρο 83. Τι βαθμό πήραν οι μαθητές που είχαν βαθμό A ;

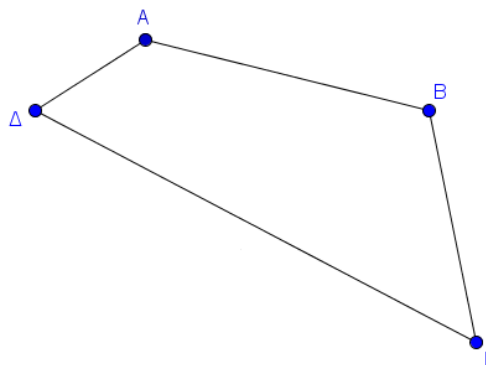
A. 88 B. 93 Γ. 94 Δ. 85 E. 98

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $\angle AED = 90^\circ$, $AG = 4 \text{ cm}$ και $BD = 7 \text{ cm}$. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABGD$ ισούται με:



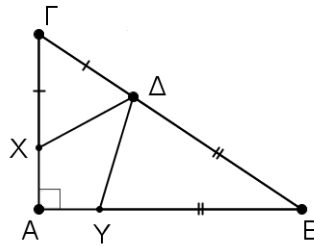
A. 22 cm^2 B. 28 cm^2 Γ. 11 cm^2 Δ. 14 cm^2 E. $5,5 \text{ cm}^2$

9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $AB = 10 \text{ cm}$, $B\Gamma = 9 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 19 \text{ cm}$ και $\Delta A = 5 \text{ cm}$. Ποιο από τα πιο κάτω μπορεί να είναι το μήκος της AG ;

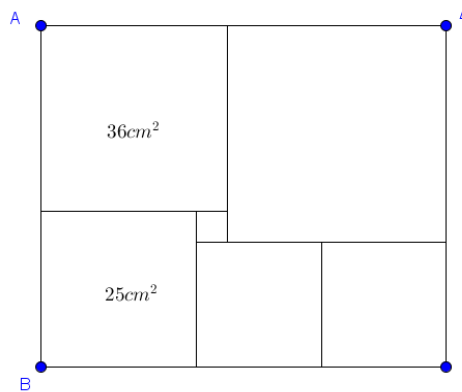


A. 9 cm B. 19 cm Γ. 20 cm Δ. 14 cm E. 15 cm

10. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\Gamma X = \Gamma\Delta$ και $B\Upsilon = B\Delta$. Η γωνία $\angle X\Delta\Upsilon$ ισούται με:



- A. 30° B. 35° Γ. 40° Δ. 45° Ε. Δεν μπορεί να υπολογιστεί
11. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ χωρίζεται σε 6 τετράγωνα όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, στο οποίο δηλώνεται το εμβαδόν σε δύο από αυτά. Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, σε cm , ισούται με:



- A. 50 B. 52 Γ. 44 Δ. 46 Ε. 48
12. Ποιο από τα πιο κάτω είναι ίσο με το $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$;
- A. $2\sqrt{6}$ B. $3\sqrt{6}$ Γ. $6\sqrt{2}$ Δ. $\sqrt{19}$ Ε. 24
13. Αν $f(x) = \frac{x}{x+1}$, τότε το $f(f(f(f(2016))))$ ισούται με:
- A. $\frac{2016}{2017}$ B. $\frac{2016}{2033}$ Γ. $\frac{2016}{6048}$ Δ. $\frac{2016}{8064}$ Ε. $\frac{2016}{8065}$

14. Αν ο Ιούλιος ενός έτους έχει πέντε Κυριακές, τότε ο Αύγουστος του ίδιου έτους έχει σίγουρα πέντε:

- A. Δευτέρες B. Τρίτες Γ. Τετάρτες Δ. Πέμπτες E. Παρασκευές

15. Το ψηφίο των μονάδων του $3^{2017} + 2^{2017}$ ισούται με:

- A. 1 B. 3 Γ. 5 Δ. 7 E. 9

16. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(5, 4)$ και $\Gamma(7, 2)$. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με:

- A. $4\sqrt{2}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ Γ. $\sqrt{26}$ Δ. 6,5 E. 6

17. Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν ώστε το άθροισμα του ψηφίου των μονάδων με το ψηφίο των δεκάδων να ισούται με το ψηφίο των εκατοντάδων;

- A. 51 B. 54 Γ. 55 Δ. 45 E. 50

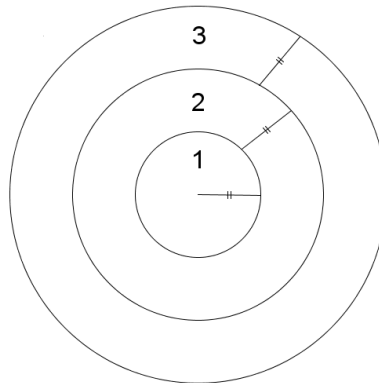
18. Το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών αριθμών είναι ίσο με το οκταπλάσιο του αθροίσματός τους. Το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι:

- A. 149 B. 194 Γ. 50 Δ. 77 E. 110

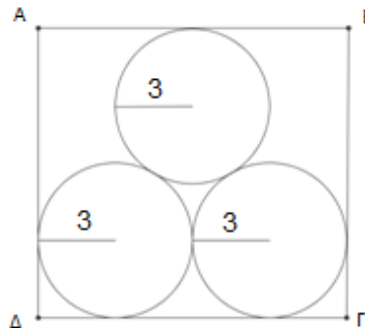
19. Αν οι αριθμοί 2, 3, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ και $\sqrt[3]{14}$ γραφτούν από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τότε ο αριθμός που βρίσκεται στο μέσο είναι ο:

- A. 2 B. 3 Γ. $\sqrt{5}$ Δ. $\sqrt{7}$ E. $\sqrt[3]{14}$

20. Σε ένα αγώνα σκοποβολής ένας σκοπευτής κτυπά σίγουρα το στόχο (βλέπε το πιο κάτω σχήμα) με ίση πιθανότητα να κτυπήσει οποιοδήποτε σημείο του στόχου. Η πιθανότητα ο σκοπευτής να κτυπήσει σε μια βολή ένα σημείο στην περιοχή 3 είναι:



- A. $\frac{9}{14}$ B. $\frac{9}{16}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{5}{9}$ Ε. $\frac{2}{3}$
21. Οι τρεις κύκλοι του πιο κάτω σχήματος εφάπτονται εσωτερικά του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, καθώς και μεταξύ τους ανά δύο. Αν κάθε κύκλος έχει ακτίνα 3 cm , το ύψος $B\Gamma$ του ορθογωνίου, σε cm , είναι:



- A. 9 B. 12 Γ. $2\sqrt{3} + 6$ Δ. $3\sqrt{3} + 6$ Ε. $\sqrt{6} + 6$
22. Αν ο αριθμός N είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος του οποίου το γινόμενο των ψηφίων του είναι ίσο με 2016, τότε το άθροισμα των ψηφίων του N ισούται με:

- A. 26 B. 28 Γ. 32 Δ. 23 Ε. 25

23. Έστω

$$A = 1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \dots + 37 \times 38 + 39$$

και

$$B = 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + \dots + 36 \times 37 + 38 \times 39.$$

Η διαφορά $B - A$ είναι ίση με:

- A. 722 B. 760 Γ. 342 Δ. 380 Ε. 540

24. Αν $x^2 = 8x + y$ και $y^2 = x + 8y$ με $x \neq y$, τότε το $x^2 + y^2$ είναι ίσο με:

- A. 9 B. 21 Γ. 49 Δ. 56 Ε. 63

25. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του 1008×1009 με το 2017 ισούται με:

- A. 0 B. 1 Γ. 504 Δ. 1008 Ε. 2016

**CYPRUS
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
2017**

ENGLISH VERSION



CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY

36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos

Nicosia, Cyprus

Tel. 22378101, Fax: 22379122

Email: cms@cms.org.cy -Website: www.cms.org.cy

18th CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 30/04/2017

EXAMS PAPER

9th Grade – C' Gymnasium

10th Grade - A' Lyceum

TIME: 60 minutes

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

and these are **incorrect**

1. A B C D E

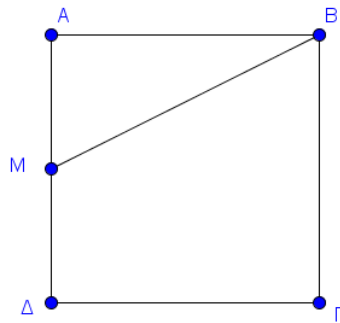
1. A B C D E

1. A B C D E

1. The set A has 30 elements and the set B has 25 elements. What is the smallest possible number of elements in $A \cup B$, the union of A and B ?

A. 30 B. 55 Γ. 5 Δ. 25 E. 750

2. In the figure below, $AB\Gamma\Delta$ is a square and M is the midpoint of $A\Delta$. The ratio of the area of the triangle ABM to the area of the square $AB\Gamma\Delta$ is equal to:



A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ Γ. $\frac{1}{6}$ Δ. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{8}$

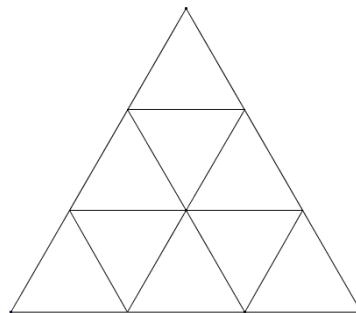
3. If $a * b = ab + b$, then $5 * (4 * (3 * (2 * 1)))$ is equal to:

A. 60 B. 120 Γ. 240 Δ. 360 E. 720

4. A function f has the property that $f(3x - 2) = x^2 + 2x - 1$ for all real numbers x . Then $f(7)$ is equal to:

A. 14 B. 16 Γ. 62 Δ. 7 E. 398

5. The number of triangles in the figure below is equal to:



A. 9 B. 10 Γ. 11 Δ. 12 E. 13

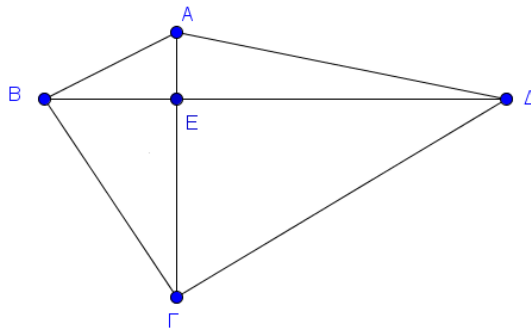
6. The point $(4, 1)$ belongs on a line (ε) with slope 3. Which of the following points also belongs on the line (ε) ?

A. $(6, 3)$ B. $(6, 7)$ Γ. $(3, -1)$ Δ. $(5, 5)$ E. None of the previous

7. A teacher gave a test to a class of students out of which 10 % had grade A in the first semester. The average score on the test was 84. The students with grade A all received the same score, while the average score of the others was 83. What score did each of the students with grade A receive on the test?

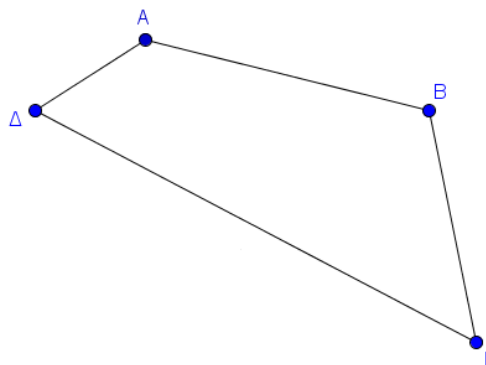
A. 88 B. 93 Γ. 94 Δ. 85 E. 98

8. In the figure below it is given that $\angle AED = 90^\circ$, $A\Gamma = 4 \text{ cm}$ and $B\Delta = 7 \text{ cm}$. The area of the quadrilateral $AB\Gamma\Delta$ is equal to:



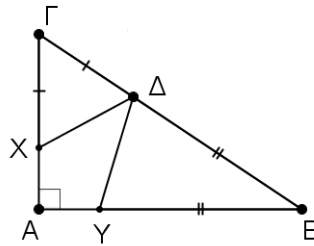
A. 22 cm^2 B. 28 cm^2 Γ. 11 cm^2 Δ. 14 cm^2 E. $5,5 \text{ cm}^2$

9. In the figure below it is given that $AB = 10 \text{ cm}$, $B\Gamma = 9 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 19 \text{ cm}$ and $\Delta A = 5 \text{ cm}$. Which of the following could be the length of $A\Gamma$?

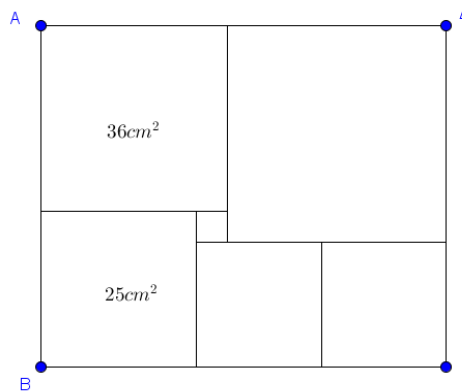


A. 9 cm B. 19 cm Γ. 20 cm Δ. 14 cm E. 15 cm

10. In the figure below $AB\Gamma$ is a right-angled triangle with $\Gamma X = \Gamma\Delta$ and $BY = B\Delta$. The angle $\angle X\Delta Y$ is equal to:



- A. 30° B. 35° Γ. 40° Δ. 45° E. It cannot be determined
11. The rectangle $AB\Gamma\Delta$ is partitioned in 6 squares, as shown in the figure below, on which the area of two of these squares is also stated. The perimeter of the rectangle $AB\Gamma\Delta$, in cm , is equal to:



- A. 50 B. 52 Γ. 44 Δ. 46 E. 48
12. Which of the following is equal to $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$?
- A. $2\sqrt{6}$ B. $3\sqrt{6}$ Γ. $6\sqrt{2}$ Δ. $\sqrt{19}$ E. 24
13. If $f(x) = \frac{x}{x+1}$, then $f(f(f(f(2016))))$ is equal to:

- A. $\frac{2016}{2017}$ B. $\frac{2016}{2033}$ Γ. $\frac{2016}{6048}$ Δ. $\frac{2016}{8064}$ E. $\frac{2016}{8065}$

14. If the July of a certain year has five Sundays, then the August of the same year will certainly have five:

- A. Mondays B. Tuesdays Γ. Wednesdays Δ. Thursdays E. Fridays

15. The units digit of $3^{2017} + 2^{2017}$ is equal to:

- A. 1 B. 3 Γ. 5 Δ. 7 E. 9

16. Given the points $A(2, 1)$, $B(5, 4)$ and $\Gamma(7, 2)$. The area of the triangle $AB\Gamma$ is equal to:

- A. $4\sqrt{2}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ Γ. $\sqrt{26}$ Δ. 6,5 E. 6

17. How many three-digit numbers are there such that the sum of the units digit with the tens digit is equal to the hundreds digit?

- A. 51 B. 54 Γ. 55 Δ. 45 E. 50

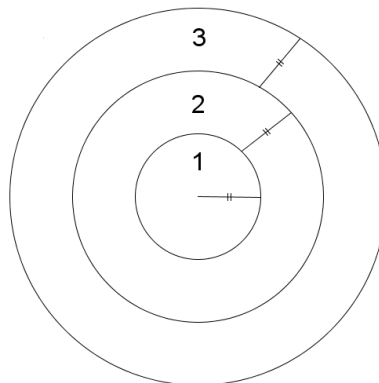
18. The product of three consecutive positive numbers is equal to eight times their sum. The sum of their squares is:

- A. 149 B. 194 Γ. 50 Δ. 77 E. 110

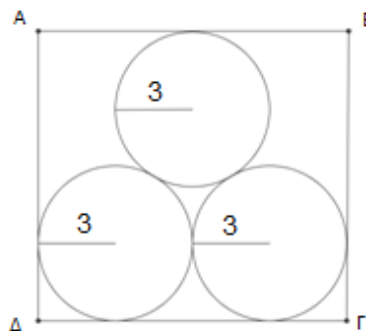
19. If the numbers 2, 3, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ and $\sqrt[3]{14}$ are arranged in increasing order of magnitude, then the middle number is:

- A. 2 B. 3 Γ. $\sqrt{5}$ Δ. $\sqrt{7}$ E. $\sqrt[3]{14}$

20. Assume in the game of darts that a beginner hits the dartboard (see the following figure) and the probability of hitting each point of the dartboard is equally likely. The probability that the beginner hits in one shot the area marked 3 is:



- A. $\frac{9}{14}$ B. $\frac{9}{16}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{5}{9}$ E. $\frac{2}{3}$
21. The three circles of the figure below are mutually tangent and are also tangent to the rectangle $AB\Gamma\Delta$. If each circle has a radius of 3 cm , the height $B\Gamma$ of the rectangle, in cm , is:



- A. 9 B. 12 Γ. $2\sqrt{3} + 6$ Δ. $3\sqrt{3} + 6$ E. $\sqrt{6} + 6$
22. If N is the smallest positive integer whose product of digits is equal to 2016, then the sum of the digits of N is equal to:

- A. 26 B. 28 Γ. 32 Δ. 23 E. 25

23. Let

$$A = 1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \dots + 37 \times 38 + 39$$

and

$$B = 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + \dots + 36 \times 37 + 38 \times 39.$$

The difference $B - A$ is equal to:

- A. 722 B. 760 Γ. 342 Δ. 380 E. 540

24. If $x^2 = 8x + y$ and $y^2 = x + 8y$ with $x \neq y$, then $x^2 + y^2$ is equal to:

- A. 9 B. 21 Γ. 49 Δ. 56 E. 63

25. The remainder of the division of 1008×1009 with 2017 is equal to:

- A. 0 B. 1 Γ. 504 Δ. 1008 E. 2016

