ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΙΗ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2017

30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

Β΄ & Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

www.cms.org.cy

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ **ΕΛΛΗΝΙΚΑ** ΚΑΙ **ΑΓΓΛΙΚΑ**
PAPERS IN BOTH **GREEK** AND **ENGLISH**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2017

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

ΙΗ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 30/04/2017

ΔΟΚΙΜΙΟ

Β΄, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.

- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.

- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.

- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.

- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα 2+3=? (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Σωστή συμπλήρωση:

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

Λανθασμένη συμπλήρωση:

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

1. Αν α και β είναι δύο θετικοί ρητοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha\beta}$ να είναι θετικός ρητός αριθμός, τότε ισχύει:

Α. $\sqrt{\alpha}$ και $\sqrt{\beta}$ είναι άρρητοι αριθμοί
Β. $\sqrt{\alpha}$ και $\sqrt{\beta}$ είναι ρητοί αριθμοί
Γ. $\sqrt{\alpha}$ είναι ρητός αριθμός και $\sqrt{\beta}$ είναι άρρητος αριθμός
Δ. $\sqrt{\alpha\beta}$ είναι άρρητος αριθμός
Ε. $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός

2. Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν μήλα και πορτοκάλια. Η μέση τιμή του βάρους ενός μήλου είναι $160gr$, η μέση τιμή του βάρους ενός πορτοκαλιού είναι $400gr$ και η μέση τιμή του βάρους ενός φρούτου (από όλα τα μήλα και πορτοκάλια μαζί) είναι $280gr$. Αν στο κιβώτιο υπάρχουν 36 μήλα, τι από τα παρακάτω ισχύει;

Α. Το πλήθος των πορτοκαλιών είναι το ίδιο με το πλήθος των μήλων.
Β. Το πλήθος των πορτοκαλιών είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των μήλων.
Γ. Το πλήθος των πορτοκαλιών είναι μικρότερο από το πλήθος των μήλων.
Δ. Το πλήθος των πορτοκαλιών είναι κατά 5 μεγαλύτερο από το πλήθος των μήλων.
Ε. Το πλήθος των πορτοκαλιών είναι διπλάσιο από το πλήθος των μήλων.

3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται άρτια, όταν:
$$\forall x \in A, -x \in A \text{ και } f(-x)=f(x)$$

Ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις **<u>δεν</u>** είναι άρτια;

Α. $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$

Β. $f(x)=\text{τεμ}x,\ x\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$

Γ. $f(x)=\log x^2,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Δ. $f(x)=x^2+\text{ημ}x,\ x\in\mathbb{R}$

Ε. $f(x)=3x^4-2x^2+17,\ x\in\mathbb{R}$

4. Αν $x>0$ και
$$\frac{\log_3 x}{\log_3 5}=3,$$
η τιμή του x είναι:

Α. 5 Β. 9 Γ. 25 Δ. 32 Ε. 125

5. Αν α και β είναι οι ρίζες του τριωνύμου $f(x) = x^2 - \kappa x + \lambda^2$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$, τότε η τιμή της παράστασης $\alpha^2 + \beta^2$ είναι:

Α. $2\kappa^2 - \lambda^2$ Β. $\kappa^2 + \lambda^2$ Γ. $\kappa^2 - 2\lambda^2$ Δ. $\kappa^2 - \lambda^2$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

6. Τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R), η γωνία του $\angle\Gamma = 90°$ και η AB δεν είναι παράλληλη με την $\Gamma\Delta$. Ποιο από τα παρακάτω είναι ορθό;

Α. $\angle A = \angle B$ Β. $\angle B = \angle\Delta$ Γ. $\angle B = 90°$ Δ. $R = \frac{A\Gamma}{2}$ Ε. $R = \frac{B\Delta}{2}$

7. Εάν το τριώνυμο $P(x) = (p-3)x^2 - 2px + 3p - 6$ έχει σύνολο τιμών $[0, +\infty)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η τιμή του p μπορεί να είναι:

Α. $\frac{3}{2}$ Β. 4 Γ. 6 Δ. 7 Ε. 8

8. Στο τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ είναι $AB = 20\,m$, $A\Gamma = 15\,m$ και $\angle BA\Gamma = 90°$. Η απόσταση της κορυφής A από την ευθεία $B\Gamma$ είναι:

Α. $8\,m$ Β. $9\,m$ Γ. $10\,m$ Δ. $12\,m$ Ε. $13\,m$

9. Αν $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ είναι Αριθμητική Πρόοδος και $\beta_1 + \beta_4 + \beta_7 + \cdots + \beta_{28} = 220$, τότε η τιμή του αθροίσματος $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ \ldots + \beta_{28}$ είναι:

Α. 616 Β. 308 Γ. 2200 Δ. 1232 Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

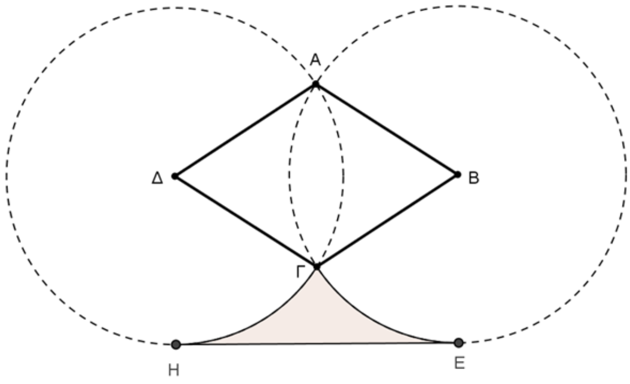
10. Αν μ, ν ακέραιοι αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\mu^2 + \nu^2 = 2^\kappa - 1$, όπου κ θετικός ακέραιος με $\kappa > 1$, τότε πολλαπλάσιο του 4 είναι ο αριθμός:

Α. $\mu^2 + \nu^2$ Β. $\mu^2 + \nu^2 + 2$ Γ. $\mu^2 + \nu^2 - 1$ Δ. $\mu^2 + \nu^2 + 4$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

11. Δίνεται το άθροισμα $K = 1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{2017}$.
Το ψηφίο των μονάδων του K είναι:

Α. 0 Β. 1 Γ. 2 Δ. 5 Ε. 9

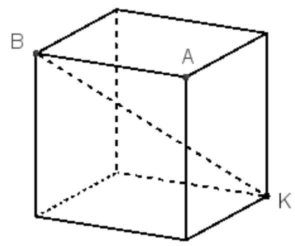
12. Στο παρακάτω σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος με μεγαλύτερη διαγώνιο $ΒΔ = 10\ cm$ και $\angle ΒΑΔ = 120°$. Γράφουμε τους κύκλους $(Β, ΒΓ)$, $(Δ, ΔΓ)$ και φέρουμε την κοινή εφαπτομένη τους $ΗΕ$. Το εμβαδόν του σκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου $ΗΓΕ$ είναι:



Α. $\frac{75\sqrt{3}}{3} - \frac{100\pi}{9} cm^2$ Β. $\frac{50\sqrt{3}}{3} - \frac{100\pi}{9} cm^2$ Γ. $\frac{75\sqrt{3}}{9} - \frac{100\pi}{3} cm^2$

Δ. $\frac{50\sqrt{3}}{9} - \frac{100\pi}{3} cm^2$ Ε. $\frac{75\sqrt{3} - 100\pi}{3} cm^2$

13. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται κύβος ακμής 1 και το $ΒΚ$ είναι μια διαγώνιός του. Η απόσταση της κορυφής $Α$ από τη διαγώνιο $ΒΚ$ είναι:



Α. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ Β. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ Ε. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

14. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\log(x^2 - 2x - 2) \leq 0$ είναι:

Α. $\left[-1, 1-\sqrt{3}\right]$ Β. $\left[1+\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ Γ. $[-1, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, 3]$

Δ. $\left[1, \sqrt{3}\right]$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

15. Σε ένα πρόχειρο διαγώνισμα στα Μαθηματικά η βαθμολογία που πήραν όλοι οι μαθητές ενός τμήματος ήταν ακριβώς η ίδια και ήταν ακέραιος αριθμός στο διάστημα $[1,10]$. Αν το τμήμα έχει 11 αγόρια και ν κορίτσια και η συνολική βαθμολογία του τμήματος στο διαγώνισμα ήταν $\nu^2 + 9\nu - 2$, τότε το πλήθος των μαθητών τμήματος είναι:

Α. 20 Β. 25 Γ. 18 Δ. 23 Ε. 19

16. Η τιμή της παράστασης

$$συν20° - συν40° + συν60° - συν80°$$

είναι:

Α. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Β. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{1}{2}$ Ε. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ ισχύει

$$\left(\sqrt{f(x)} - 2\right)\left(\sqrt{f(x)} + 1\right) = x - 2, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

τότε το $\lim_{x\to 2} f(x)$ είναι:

Α. 0 Β. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4

18. Μέσα σε ένα κιβώτιο υπάρχουν κόκκινες και μπλε μπάλες. Επιλέγω τυχαία, διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση, 2 μπάλες από το κιβώτιο. Η πιθανότητα να είναι κόκκινη η 1η μπάλα είναι $\frac{3}{4}$**.** Η πιθανότητα να είναι μπλε η 2η μπάλα είναι $\frac{1}{5}$. Ποιο από τα παρακάτω ισχύει;

Α. Η πρώτη μπάλα που επέλεξα ήταν κόκκινη.
Β. Η πρώτη μπάλα που επέλεξα ήταν μπλε.
Γ. Οι κόκκινες μπάλες ήταν τετραπλάσιες από τις μπλε αρχικά στο κιβώτιο.
Δ. Το πλήθος των μπαλών αρχικά στο κιβώτιο ήταν μικρότερο από 15.
Ε. Το πρόβλημα είναι αδύνατο.

19. Για πόσους πρώτους αριθμούς p ο αριθμός $17p + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο;

Α. 0 Β. Άπειρους Γ. 1 Δ. 2 Ε. 3

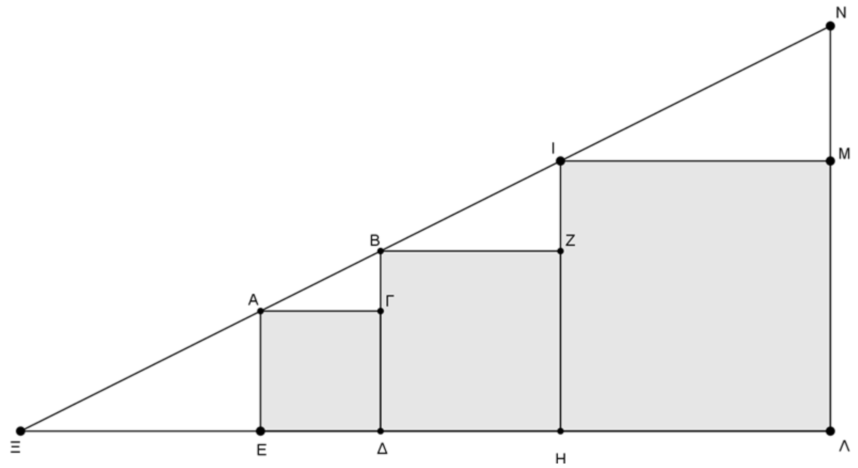
20. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ έχουμε, $f(1) = 1, f(2) = 2$ και

$$f(\nu + 2)f(\nu) = f(\nu + 1) + 1, \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Το $f(2017)$ είναι:

Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5

21. Τα τετράγωνα $ΑΕΔΓ$, $ΔΒΖΗ$ και $ΗΙΜΛ$ είναι εγγεγραμμένα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΞΛΝ$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το $ΑΕΔΓ$ έχει πλευρά 2 και το $ΗΙΜΛ$ έχει πλευρά $\frac{9}{2}$, τότε το εμβαδόν του τριγώνου $ΞΛΝ$ είναι:



Α. 49 Β. $\left(\frac{27}{4}\right)^2$ Γ. 50 Δ. $\left(\frac{25}{2}\right)^2$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

22. Αν $x^2 + x + 1 = 0$, τότε η παράσταση

$$A = x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}$$

ισούται με:

Α. 0 Β. 1 Γ. -1 Δ. 2017 Ε. -2017

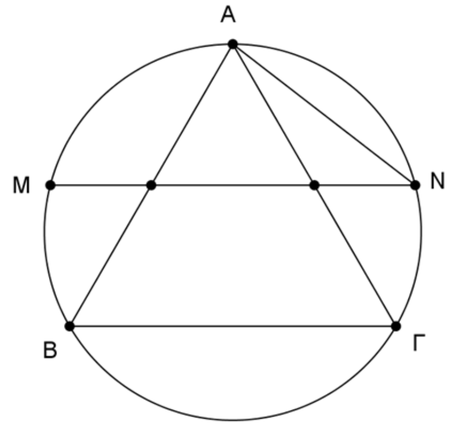
23. Αν α, β θετικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε το άθροισμά τους να είναι 75 και το γινόμενό τους $\alpha\beta$ να διαιρείται με το 75, τότε το πλήθος των ζευγών (α, β), με αυτές τις ιδιότητες, είναι:

Α. 1 Β. 5 Γ. 6 Δ. 7 Ε. 8

24. Έστω N ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Ο Σάββας γράφει όλους τους διαιρέτες του N, εκτός από το 1 και το N και παρατηρεί ότι από αυτούς τους διαιρέτες που έμειναν, ο μεγαλύτερος είναι 45πλάσιος του μικρότερου. Οι θετικοί ακέραιοι N με την πιο πάνω ιδιότητα είναι:

Α. Κανένας Β. Δύο Γ. Τρεις Δ. Πέντε Ε. Άπειροι

25. Στο πιο κάτω σχήμα το ισόπλευρο τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ έχει πλευρά μήκους 2 και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η χορδή MN αυτού του κύκλου διέρχεται από τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου. Το μήκος της χορδής AN είναι ίσο με:



Α. $\sqrt{2}$ Β. $\sqrt{3}$ Γ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Δ. $\sqrt{5}-1$ Ε. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD 2017

ENGLISH VERSION

CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY

36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos

Nicosia, Cyprus

Tel. 22378101, Fax: 22379122

Email: cms@cms.org.cy -Website: www.cms.org.cy

18th CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 30/04/2017

EXAMS PAPER

11th, 12th Grade – B΄, C΄ Lyceum

TIME: 60 minutes

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result 2+3=? (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

and these are **incorrect**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

1. If α and β are two positive rational numbers such that the number $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha\beta}$ is a positive rational number, then it is true that:

A. $\sqrt{\alpha}$ and $\sqrt{\beta}$ are irrational numbers
B. $\sqrt{\alpha}$ and $\sqrt{\beta}$ are rational numbers
Γ. $\sqrt{\alpha}$ is an rational and $\sqrt{\beta}$ is an irrational number
Δ. $\sqrt{\alpha\beta}$ is an irrational number
E. $\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{2}$ is a rational number

2. In a box there are apples and oranges. The average value of the weight of an apple is $160gr$, the average value of the weight of an orange is $400gr$ and the average value of the weight of a fruit (the apples and oranges taken together) is $280gr$. Given that in the box there are 36 apples, what is true from the following?

A. The number of oranges is the same as the number of apples.
B. The number of oranges is greater than the number of apples.
Γ. The number of oranges is smaller than the number of apples.
Δ. The number of oranges is greater by 5 than the number of apples.
E. The number of oranges is double the number of apples.

3. A function f with domain $A \subseteq \mathbb{R}$ is even when:

$$\forall x \in A, -x \in A \text{ and } f(-x) = f(x)$$

Which of the following functions is **<u>not</u>** even?

A. $f(x) = |x|\,,\ x \in \mathbb{R}$

B. $f(x) = \sec x\,,\ x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$

Γ. $f(x) = \log x^2\,,\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Δ. $f(x) = x^2 + \sin x\,,\ x \in \mathbb{R}$

E. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 17\,,\ x \in \mathbb{R}$

4. If $x > 0$ and

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 5} = 3\,,$$

then the value of x is:

A. 5 B. 9 Γ. 25 Δ. 32 E. 125

5. If α and β are the roots of the trinomial $f(x) = x^2 - \kappa x + \lambda^2$, with $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ and $\lambda \neq 0$, then the value of the expression $\alpha^2 + \beta^2$ is equal to:

A. $2\kappa^2 - \lambda^2$ B. $\kappa^2 + \lambda^2$ Γ. $\kappa^2 - 2\lambda^2$ Δ. $\kappa^2 - \lambda^2$ E. None of the previous

6. The quadrilateral $AB\Gamma\Delta$ is inscribed in a circle (O, R), its angle $\angle\Gamma = 90°$ and AB is not parallel to $\Gamma\Delta$. Which of the following is true?

A. $\angle A = \angle B$ B. $\angle B = \angle\Delta$ Γ. $\angle B = 90°$ Δ. $R = \frac{A\Gamma}{2}$ E. $R = \frac{B\Delta}{2}$

7. If the trinomial $P(x) = (p-3)x^2 - 2px + 3p - 6$ has as range the set $[0, +\infty)$ for all $x \in \mathbb{R}$, then the value of p can be:

A. $\frac{3}{2}$ B. 4 Γ. 6 Δ. 7 E. 8

8. In the triangle $\Delta AB\Gamma$ we have $AB = 20\ m$, $A\Gamma = 15\ m$ and $\angle BA\Gamma = 90°$. The distance of the vertex A from the line $B\Gamma$ is:

A. $8\ m$ B. $9\ m$ Γ. $10\ m$ Δ. $12\ m$ E. $13\ m$

9. If $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ is an Arithmetic Progression and $\beta_1 + \beta_4 + \beta_7 + \cdots + \beta_{28} = 220$, then the value of the sum $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ \ldots + \beta_{28}$ is:

A. 616 B. 308 Γ. 2200 Δ. 1232 E. None of the previous

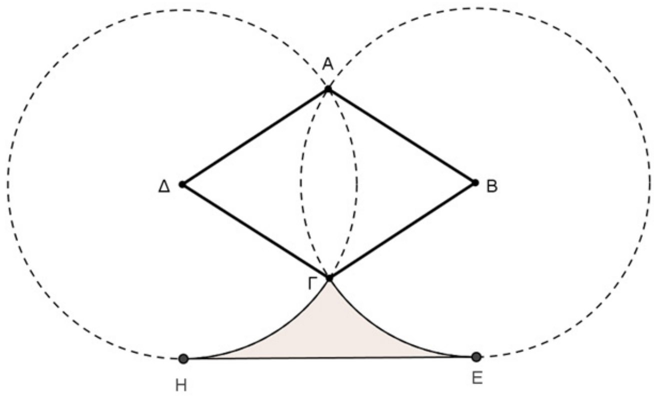
10. If μ, ν are integers such that $\mu^2 + \nu^2 = 2^\kappa - 1$, where κ positive integer with $\kappa > 1$, then which of the following numbers is a multiple of 4?

A. $\mu^2 + \nu^2$ B. $\mu^2 + \nu^2 + 2$ Γ. $\mu^2 + \nu^2 - 1$ Δ. $\mu^2 + \nu^2 + 4$ E. None of the previous

11. Given the sum $K = 1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{2017}$.
Then the digit of the units of K is:

A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 5 E. 9

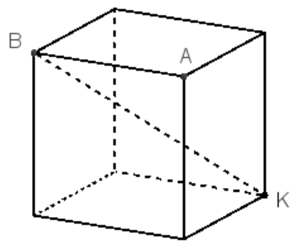
12. In the following figure $AB\Gamma\Delta$ is a rhombus with greater diagonal $B\Delta = 10\ cm$ and $\angle BA\Delta = 120°$. Draw the circles $(B, B\Gamma)$, $(\Delta, \Delta\Gamma)$ and then draw their common tangent HE. The area of the shaded region $H\Gamma E$ is:



A. $\frac{75\sqrt{3}}{3} - \frac{100\pi}{9} cm^2$ B. $\frac{50\sqrt{3}}{3} - \frac{100\pi}{9} cm^2$ Γ. $\frac{75\sqrt{3}}{9} - \frac{100\pi}{3} cm^2$

Δ. $\frac{50\sqrt{3}}{9} - \frac{100\pi}{3} cm^2$ E. $\frac{75\sqrt{3}-100\pi}{3} cm^2$

13. In the adjacent figure we have a cube with side of 1 unit and BK is one of its diagonal. The distance of the vertex A from the diagonal BK is:



A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

14. The solution set of the inequality $\log(x^2 - 2x - 2) \leq 0$ is:

A. $[-1, 1-\sqrt{3}\,]$ B. $[1+\sqrt{3}, \sqrt{3}\,]$ Γ. $[-1, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}\,, 3]$

Δ. $[1, \sqrt{3}\,]$ E. None of the previous

15. In a mathematics test the grade that the students in a class achieved was exactly the same for each of them and it was an integer in the interval $[1,10]$. If in the class there were 11 boys and ν girls and if the total of their grades was $\nu^2 + 9\nu - 2$, then the number of students in the class is:

A. 20 B. 25 Γ. 18 Δ. 23 E. 19

16. The value of the expression

$$\sigma\upsilon\nu 20° - \sigma\upsilon\nu 40° + \sigma\upsilon\nu 60° - \sigma\upsilon\nu 80°$$

is:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. If for the function $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ it is true that

$$\left(\sqrt{f(x)} - 2\right)\left(\sqrt{f(x)} + 1\right) = x - 2, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

then the $\lim_{x \to 2} f(x)$ is equal to:

A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 E. 4

18. In a box there are red and blue balls. We choose randomly, successively and without reposition, 2 balls from the box. The probability that the 1st ball is red is $\frac{3}{4}$. The probability that the 2nd ball is blue is $\frac{1}{5}$. Which of the following is true?

A. The first ball chosen was red.
B. The first ball chosen was blue.
Γ. Initially the number of red balls in the box was four times the number of blue ones.
Δ. The number of balls in the box initially was less than 15.
E. The problem cannot be solved.

19. The number of prime numbers p, for which the number $17p + 1$ is a perfect square, is:

A. 0 B. Infinite Γ. 1 Δ. 2 E. 3

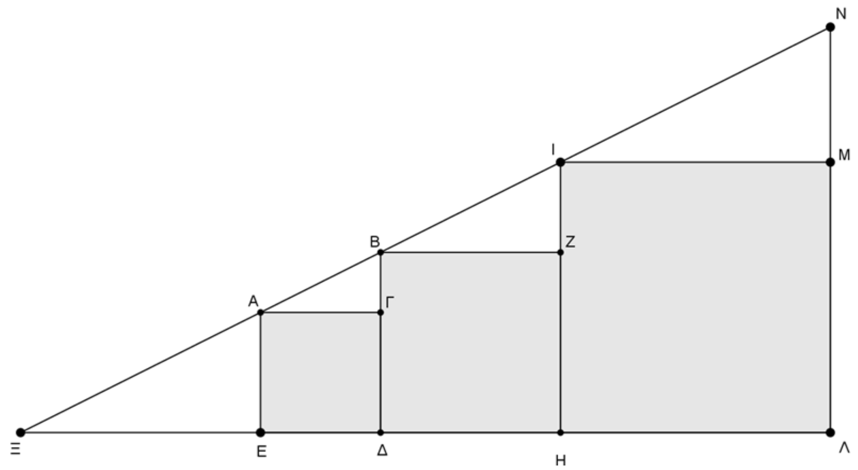
20. For the function $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ it is true that, $f(1) = 1, f(2) = 2$ and

$$f(\nu + 2) f(\nu) = f(\nu + 1) + 1, \ \forall \, \nu \in \mathbb{N}.$$

Then $f(2017)$ is equal to:

A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 4 E. 5

21. The squares $AE\Delta\Gamma$, ΔBZH and $HIM\Lambda$ are inscribed in the right angle triangle $\Xi\Lambda N$, as it is shown in the following figure. Given that $AE\Delta\Gamma$ has a side of 2 units and $HIM\Lambda$ has a side of $\frac{9}{2}$ units, then the area of the triangle $\Xi\Lambda N$ is:



A. 49 B. $\left(\frac{27}{4}\right)^2$ Γ. 50 Δ. $\left(\frac{25}{2}\right)^2$ E. None of the previous

22. If $x^2 + x + 1 = 0$, then the expression

$$A = x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}$$

is equal to:

A. 0 B. 1 Γ. -1 Δ. 2017 E. -2017

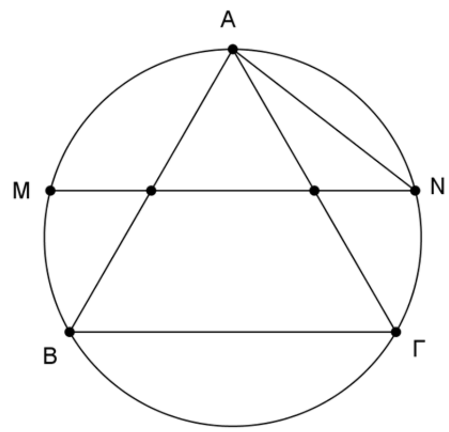
23. If α, β are positive integers such that their sum is 75 and their product $\alpha\beta$ is divisible by 75, then the number of pairs (α, β), with these properties, is:

A. 1 B. 5 Γ. 6 Δ. 7 E. 8

24. Let N be a positive integer. Savvas writes down all the divisors of N, except from 1 and N, and observes that out of these left divisors, the greatest one is 45 times the least one. The positive integers N with this property are:

A. None B. Two Γ. Three Δ. Five E. Infinite

25. In the figure below the equilateral triangle $\varDelta AB\varGamma$ has side of length of 2 units and it is inscribed in a circle. The chord MN of this circle goes through the midpoints of the sides AB and $A\varGamma$ of the triangle. The length of the chord AN is equal to:



Α. $\sqrt{2}$ Β. $\sqrt{3}$ Γ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Δ. $\sqrt{5}-1$ Ε. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$