ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 4/03/2017 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>Πρόβλημα 1:</u> Έστω x, y, z να είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$x + y + z \geq xyz$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \sqrt{3}$$

<u>Πρόβλημα 2</u> : Να βρείτε όλες τις τριάδες των θετικών ακεραίων (p, q, n) όπου p, q είναι πρώτοι αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p^2 + q^2 - n^2 = 3(n - p - q)$$

<u>Πρόβλημα 3</u> : Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ με $(AB < A\Gamma)$, και H το ορθόκεντρο του. Από το H φέρουμε κάθετη προς την διχοτόμο (δ) της γωνίας $\angle BA\Gamma$ του τριγώνου, η οποία τέμνει τις πλευρές του $AB, A\Gamma$ στα σημεία Θ, I αντίστοιχα. Ονομάζουμε Ξ το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων $(C_1), (C_2)$ των τριγώνων $\varDelta A\Theta I$ και $\varDelta AB\Gamma$, αντίστοιχα. Έστω Λ το σημείο τομής του (C_1) με την διχοτόμο (δ) (διαφορετικό από το A) και N το σημείο τομής της ευθείας $H\Lambda$ με την $B\Gamma$. Αν $\varDelta$ είναι το ίχνος του ύψους του τριγώνου από την κορυφή A πάνω στην πλευρά του $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι, $\angle B\varDelta\Xi = \angle \Xi AN$.

<u>Πρόβλημα 4</u> : Μια *«μαγική τριγωνοποίηση»* ονομάζεται μια διαμέριση ενός τριγώνου σε μικρότερα τρίγωνα με ένα πεπερασμένο αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων των οποίων τα άκρα είναι οι κορυφές του τριγώνου ή σημεία στο εσωτερικό του, έτσι ώστε σε κάθε σημείο (συμπεριλαμβανομένων των κορυφών του τριγώνου) να συναντώνται ο ίδιος αριθμός ευθυγράμμων τμημάτων.
Να βρείτε τον μέγιστο αριθμό των μικρότερων τριγώνων που μπορεί να διαιρεθεί ένα τρίγωνο με μια τέτοια *«μαγική τριγωνοποίηση»*.