

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**ΙΖ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2016**

17 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016



**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ &
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

www.cms.org.cy

**ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH**

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2016**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΕΚΔΟΣΗ**



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

ΙΖ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 17/04/2016

ΔΟΚΙΜΙΟ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Σωστή συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

Λανθασμένη συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. Η τιμή της παράστασης $A = \frac{2^{1000} + 2^{1008}}{2^{1001} + 2^{1001}}$ είναι:

- A. $\frac{257}{4}$ B. $\frac{129}{3}$ Γ. 4 Δ. 64 Ε. $\frac{1004}{1001}$

2. Αν $f(x) = ax + 3$ με $a > 0$ και $f(f(2)) - 3a = 4$, τότε το a ισούται με:

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Δ. $\frac{1}{4}$ Ε. Δεν προσδιορίζεται

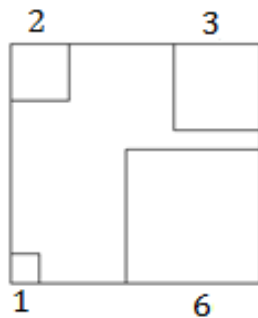
3. Αν $x = 2016$, τότε η τιμή της παράστασης

$$A = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{x+2015}\right) \left(1 - \frac{1}{x+2016}\right)$$

είναι:

- A. 0 B. $\frac{2015}{2016}$ Γ. $\frac{1}{4032}$ Δ. $\frac{2015}{4032}$ Ε. $\frac{4032}{2015}$

4. Από ένα τετράγωνο κόβονται στις τέσσερις γωνίες του τετράγωνο διαστάσεων 1cm , 2cm , 3cm και 6cm . Μετά την αποκοπή, το εμβαδόν του σχήματος που απομένει είναι το μισό του αρχικού. Η περίμετρος του νέου σχήματος είναι:



- A. 36 cm B. 40 cm Γ. 44 cm Δ. 48 cm Ε. 52 cm

5. Αν $x - \frac{1}{x} = 2$ και $x > 0$, τότε η τιμή του $x + \frac{1}{x}$ είναι:

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ Γ. 3 Δ. $3\sqrt{2}$ Ε. Δεν προσδιορίζεται

6. Ο αριθμός $10^{20} - 2$ έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με:

- A. 180 B. 3 Γ. 171 Δ. 170 E. 179

7. Μια εταιρεία ανακοίνωσε ότι ο μέσος όρος του βάρους 24 αντικειμένων που έχει στις αποθήκες της είναι 46 κιλά. Μετά από έλεγχο που έγινε, ανακοινώθηκε ότι μισά από αυτά είχαν καταγραφεί λανθασμένα με 6 κιλά λιγότερα το καθένα, ενώ άλλα 6 είχαν καταγραφεί με 4 κιλά περισσότερα το καθένα. Ο πραγματικός μέσος όρος του βάρους τους ήταν:

- A. 47 κιλά B. 48 κιλά Γ. 49 κιλά Δ. 50 κιλά E. 46,5 κιλά

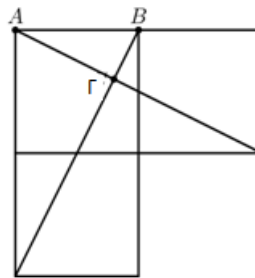
8. Ένας καθηγητής ετοιμάζει ένα διαγώνισμα συνολικής βαθμολογίας 100 μονάδων. Το διαγώνισμα αποτελείται από δύο μέρη. Οι ασκήσεις του μέρους Α βαθμολογούνται 2,5 μονάδες και του μέρους Β βαθμολογούνται με 5 μονάδες. Οι ασκήσεις του μέρους Α είναι διπλάσιες από αυτές του μέρους Β. Ο Γιάννης χρειάζεται 1 λεπτό για κάθε άσκηση του μέρους Α και 1,5 λεπτό για κάθε άσκηση του μέρους Β. Ο Γιάννης θα τελειώσει το διαγώνισμα σε:

- A. 45 λεπτά B. 40 λεπτά Γ. 30 λεπτά Δ. 43 λεπτά E. 35 λεπτά

9. Η πλειοψηφία των 30 μαθητών ενός τμήματος αγόρασε μολύβια από το βιβλιοπωλείο του σχολείου. Κάθε μαθητής αγόρασε τον ίδιο αριθμό μολυβιών και ήταν περισσότερα από 1. Το κόστος ενός μολυβιού σε σεντ ήταν αριθμός μεγαλύτερος από τον αριθμό των μολυβιών που αγόρασε ο κάθε μαθητής. Το συνολικό κόστος όλων των μολυβιών είναι €17,71. Ένα μολύβι κοστίζει σε σεντ:

- A. 7 B. 11 Γ. 17 Δ. 23 E. 77

10. Στο πιο κάτω σχήμα, τα τρία τετράγωνα είναι πλευράς 1. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ Γ. $\frac{2}{9}$ Δ. $\frac{1}{5}$ E. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. Αν $a + \beta + 5 = 0$, τότε η τιμή της παράστασης $\frac{\beta^2 + 10\beta - a^2}{a + \beta}$ είναι:

- A. 1 B. 5 Γ. -5 Δ. 25 E. 10

12. Αν $x + y = 3$ και $x^3 + y^3 = 9$, τότε η τιμή του $4x^2 y^2$ είναι:

- A. 10 B. 12 Γ. 16 Δ. 18 E. 24

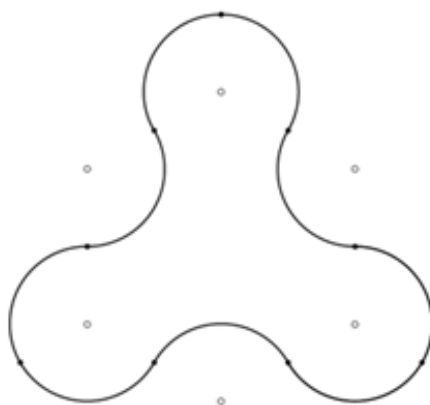
13. Αν σε τετράγωνο με πλευρά a τα μήκη δύο απέναντι πλευρών αυξηθούν κατά 40% και των άλλων δύο μειωθούν κατά 40%, τότε το εμβαδόν του νέου σχήματος θα ισούται με:

- A. $\frac{84a^2}{100}$ B. $\frac{120a^2}{100}$ Γ. $\frac{80a^2}{100}$ Δ. $\frac{116a^2}{100}$ E. a^2

14. Η ακολουθία 123456789123456789123... συνεχίζεται μέχρι το άθροισμα όλων των ψηφίων να είναι 460. Το τελευταίο ψηφίο της ακολουθίας είναι:

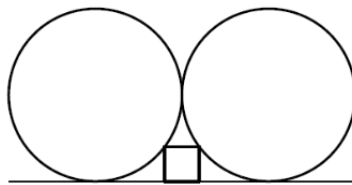
- A. 3 B. 4 Γ. 5 Δ. 6 E. 7

15. Η κλειστή καμπύλη στο σχήμα, σχηματίζεται από 9 ίσα τόξα μήκους $\frac{2\pi}{3}$ το καθένα, όπου το κάθε κέντρο των αντίστοιχων κύκλων είναι μία κορυφή κανονικού εξαγώνου πλευράς 2. Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη καμπύλη είναι:



- A. $2\pi + 6$ B. $2\pi + 4\sqrt{3}$ Γ. $3\pi + 4$ Δ. $2\pi + 3\sqrt{3} + 2$ E. $\pi + 6\sqrt{3}$

16. Δύο κύκλοι ακτίνας 1 cm εφάπτονται εξωτερικά, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι:



- A. $\frac{1}{3}\text{ cm}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{ cm}$ Γ. $\frac{\sqrt{3}}{8}\text{ cm}$ Δ. $\frac{3}{8}\text{ cm}$ Ε. $\frac{2}{5}\text{ cm}$
17. Αν n είναι πραγματικός αριθμός, ποια είναι η ελάχιστη τιμή της $f(n) = 2n^2 + 3n + 1$;

- A. 1 B. $-\frac{3}{4}$ Γ. $-\frac{1}{8}$ Δ. $-\frac{1}{16}$ Ε. Κανένα από αυτά

18. Δύο εργάτες χειρίζονται από μια μηχανή εκτύπωσης περιοδικών. Η κάθε μηχανή εκτυπώνει 1 περιοδικό το λεπτό. Ο πρώτος εργάτης σταματά την μηχανή του κάθε 60 λεπτά, για να κρυώσει και την ξεκινά μετά από 10 λεπτά. Ο δεύτερος εργάτης σταματά την μηχανή του κάθε 40 λεπτά και την ξεκινά μετά από 5 λεπτά. Αν ξεκίνησαν τις μηχανές την ίδια ώρα, πόσα περιοδικά θα εκτυπωθούν σε οκτώ ακριβώς ώρες;

- A. 840 B. 850 Γ. 860 Δ. 900 Ε. 920
19. Ο Αντρέας, ο Βασίλης κι ο Γιώργος παίζουν τρία διαφορετικά σπορ. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς.
- ✓ Αν ο Βασίλης παίζει ποδόσφαιρο, τότε ο Αντρέας παίζει καλαθόσφαιρα.
 - ✓ Αν ο Βασίλης παίζει πετόσφαιρα, τότε ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο.
 - ✓ Αν ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο ή καλαθόσφαιρα, τότε ο Γιώργος δεν παίζει πετόσφαιρα.
 - ✓ Αν ο Γιώργος δεν παίζει πετόσφαιρα, τότε ούτε ο Βασίλης παίζει πετόσφαιρα.

Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής;

- A. Ο Βασίλης παίζει ποδόσφαιρο.
B. Ο Βασίλης παίζει πετόσφαιρα.
Γ. Ο Αντρέας παίζει πετόσφαιρα.
Δ. Ο Γιώργος παίζει καλαθόσφαιρα.
Ε. Ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο.

A. A

B. B

Γ. Γ

Δ. Δ

Ε. E

20. Ένας μπογιατζής χρειάζεται 3 ώρες για να μπογιατίσει μια επιφάνεια A . Όταν εργάζεται μαζί με τον βοηθό του χρειάζεται 1 ώρα και 40 λεπτά για να μπογιατίσει την ίδια επιφάνεια. Ο βοηθός του για να μπογιατίσει την επιφάνεια A από μόνος του χρειάζεται:

- A. 3 ώρες και 45 λεπτά B. 2 ώρες και 45 λεπτά Γ. 3 ώρες και 30 λεπτά
Δ. 4 ώρες και 15 λεπτά E. 3 ώρες και 20 λεπτά

21. Έστω a και β σχετικά πρώτοι ακέραιοι αριθμοί με $a > \beta > 0$ και $\frac{a^3 - \beta^3}{(a - \beta)^3} = \frac{73}{3}$. Το $a - \beta$ είναι:

- A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 4 E. 5

22. Δίνεται τριψήφιος αριθμός X , του οποίου όταν αντιστρέψουμε τα ψηφία προκύπτει ο αριθμός Y . Το άθροισμα των X και Y είναι 1535. Το άθροισμα των ψηφίων του X είναι:

- A. 11 B. 12 Γ. 13 Δ. 15 E. 16

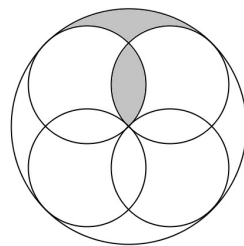
23. Η πιθανότητα ένα δίσεκτο έτος (366 μέρες) να έχει 53 Κυριακές είναι:

- A. $\frac{53}{366}$ B. $\frac{1}{366}$ Γ. $\frac{2}{7}$ Δ. $\frac{2}{53}$ E. $\frac{4}{7}$

24. Οι πραγματικοί αριθμοί x και y ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34$. Το $x + y$ είναι:

- A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 6 E. 8

25. Οι τέσσερις εσωτερικοί κύκλοι του πιο κάτω σχήματος εφάπτονται του εξωτερικού κύκλου και περνούν από το κέντρο του. Οι τέσσερις ίσοι κύκλοι τοποθετούνται συμμετρικά, έτσι ώστε τα κέντρα τους να σχηματίζουν τετράγωνο. Η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου είναι 2 μονάδες. Η διαφορά των εμβαδών των δύο σκιασμένων χωρίων είναι:



- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{\pi}{12}$ Γ. $\frac{\pi}{18}$ Δ. $\frac{\pi}{24}$ E. 0

**CYPRUS
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
2016**

ENGLISH VERSION



CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY

36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos

Nicosia, Cyprus

Tel. 22378101, Fax: 22379122

Email: cms@cms.org.cy -Website: www.cms.org.cy

17th CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 17/04/2016

EXAMS PAPER

9th Grade – C' Gymnasium

10th Grade - A' Lyceum

TIME: 60 minutes

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

and these are **incorrect**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

1. The value of $A = \frac{2^{1000} + 2^{1008}}{2^{1001} + 2^{1001}}$ is:

- A. $\frac{257}{4}$ B. $\frac{129}{3}$ Γ. 4 Δ. 64 E. $\frac{1004}{1001}$

2. If $f(x) = ax + 3$, $a > 0$ and $f(f(2)) - 3a = 4$, then a is:

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Δ. $\frac{1}{4}$ E. Not defined

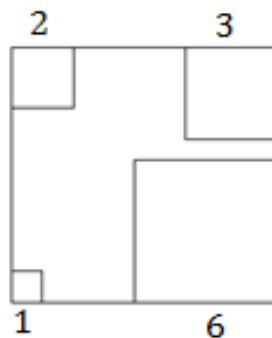
3. If $x = 2016$, then the value of the expression

$$A = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{x+2015}\right) \left(1 - \frac{1}{x+2016}\right)$$

is:

- A. 0 B. $\frac{2015}{2016}$ Γ. $\frac{1}{4032}$ Δ. $\frac{2015}{4032}$ E. $\frac{4032}{2015}$

4. A square piece of paper has squares cut off its corners. The sides of the removed squares have lengths 1 cm, 2 cm, 3 cm and 6 cm. Because of this the area of the piece of paper has been halved. The perimeter of the remaining piece of paper is:

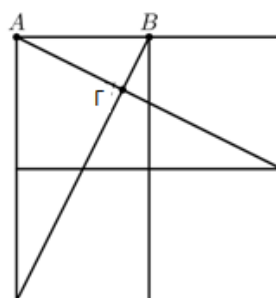


- A. 36 cm B. 40 cm Γ. 44 cm Δ. 48 cm E. 52 cm

5. If $x - \frac{1}{x} = 2$ and $x > 0$, then the value of $x + \frac{1}{x}$ is:

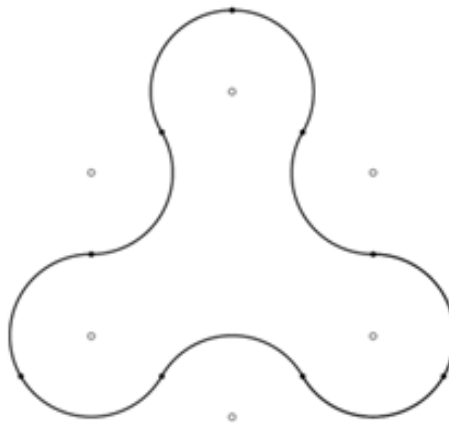
- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ Γ. 3 Δ. $3\sqrt{2}$ E. Not defined

6. The sum of the digits of the number $10^{20} - 2$ is:
- A. 180 B. 3 Γ. 171 Δ. 170 E. 179
7. A company announced that the average weight of 24 objects in its stores is 46 kilos. After a check, it was announced that half of them had been recorded erroneously with 6 kilos less, each of them and 6 others had been recorded with 4 kilos more, each of them. The actual average weight was:
- A. 47 kilos B. 48 kilos Γ. 49 kilos Δ. 50 kilos E. 46,5 kilos
8. A teacher prepares a test with overall 100 marks. The test has two parts. The exercises in part *A* are marked with 2,5 marks each and those in part *B* are marked with 5 marks each. The exercises in part *A* are two times of those in part *B*. John needs 1 minute for each exercise in part *A* and 1,5 minute for each exercise in part *B*. John will finish the test in:
- A. 45 min B. 40 min Γ. 30 min Δ. 43 min E. 35 min
9. The majority of the 30 students in a class bought pencils at the school bookstore. Each of these students bought the same number of pencils, and this number was greater than 1. The cost of a pencil in cents was a number greater than the number of pencils each student bought, and the total cost of all the pencils was €17,71. What was the cost of a pencil in cents?
- A. 7 B. 11 Γ. 17 Δ. 23 E. 77
10. In the figure below, the three squares are of side 1. The area of triangle $AB\Gamma$ is:



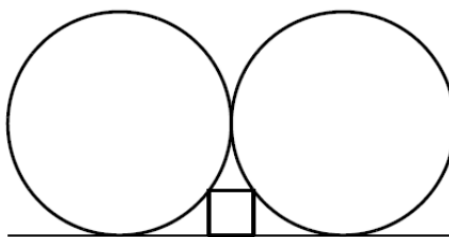
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ Γ. $\frac{2}{9}$ Δ. $\frac{1}{5}$ E. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. If $a + \beta + 5 = 0$, then the value of the expression $\frac{\beta^2 + 10\beta - a^2}{a + \beta}$ is:
- A. 1 B. 5 Γ. -5 Δ. 25 E. 10
12. Let $x + y = 3$ and $x^3 + y^3 = 9$. The value of $4x^2 y^2$ is:
- A. 10 B. 12 Γ. 16 Δ. 18 E. 24
13. If in a square of side a , the lengths of two opposite sides are increased by 40% and the lengths of the other pair are decreased by 40% then the area of the new shape will be equal to:
- A. $\frac{84a^2}{100}$ B. $\frac{120a^2}{100}$ Γ. $\frac{80a^2}{100}$ Δ. $\frac{116a^2}{100}$ E. a^2
14. The sequence 123456789123456789123 ... is continued until the sum of all the digits used is 460. The last digit in the sequence is:
- A. 3 B. 4 Γ. 5 Δ. 6 E. 7
15. The closed curve in the figure is made up of 9 congruent circular arcs each of length $\frac{2\pi}{3}$, where each of the centers of the corresponding circles is among the vertices of a regular hexagon of side 2. What is the area enclosed by curve?



- A. $2\pi + 6$ B. $2\pi + 4\sqrt{3}$ Γ. $3\pi + 4$ Δ. $2\pi + 3\sqrt{3} + 2$ E. $\pi + 6\sqrt{3}$

16. The diagram shows two circles each of radius 1 *cm* and a square. The side length of the square is:



- A. $\frac{1}{3}$ *cm* B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ *cm* Γ. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ *cm* Δ. $\frac{3}{8}$ *cm* E. $\frac{2}{5}$ *cm*
17. What is the minimum value of $f(n) = 2n^2 + 3n + 1$, where n is a real number?

- A. 1 B. $-\frac{3}{4}$ Γ. $-\frac{1}{8}$ Δ. $-\frac{1}{16}$ E. None of these
18. Two workers handle two machines that print magazines. Each machine prints 1 magazine per minute. The first worker stops this machine every 60 minutes, in order to get cool and start it again in 10 minutes. The second worker stops this machine every 40 minutes and start it again in 5 minutes. If they start them at the same time, in eight hours precisely they will have printed:

- A. 840 B. 850 Γ. 860 Δ. 900 E. 920
19. Andreas, Vasilis and George play three different sports. The following statements are true:

- ✓ If Vasilis plays soccer then Andreas plays basketball.
- ✓ If Vasilis plays volleyball then Andreas plays soccer.
- ✓ If Andreas plays soccer or basketball then George does not play volleyball.
- ✓ If George does not play volleyball then Vasilis does not play volleyball.

Which one of the following statements is true?

- A. Vasilis plays soccer.
 B. Vasilis plays volleyball.
 Γ. Andreas plays volleyball.
 Δ. George plays basketball.
 E. Andreas plays football.

- A. A B. B Γ. Γ Δ. Δ E. E

20. A painter needs 3 hours in order to paint a surface A . When he works with his assistant, he needs 1 hour and 40 minutes, in order to paint the same surface. To paint the same surface A , his assistant alone needs:

- A. 3 hours and 45 min B. 2 hours and 45 min Γ. 3 hours and 30 min
Δ. 4 hours and 15 min E. 3 hours and 20 min

21. Let a and β be relatively prime integers with $\alpha > \beta > 0$ and $\frac{\alpha^3 - \beta^3}{(\alpha - \beta)^3} = \frac{73}{3}$. What is $a - \beta$?

- A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 4 E. 5

22. A three-digit number X has its digits reversed to become Y . The sum of X and Y is 1535. The sum the digits of X is:

- A. 11 B. 12 Γ. 13 Δ. 15 E. 16

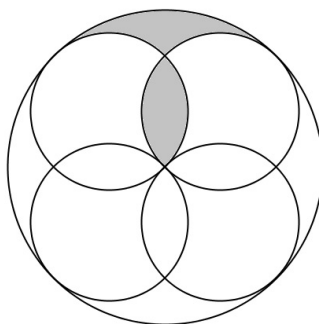
23. The probability that a leap year (366 days) has 53 Sundays is:

- A. $\frac{53}{366}$ B. $\frac{1}{366}$ Γ. $\frac{2}{7}$ Δ. $\frac{2}{53}$ E. $\frac{4}{7}$

24. Real numbers x and y satisfies the equation $x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34$. What is $x + y$?

- A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 6 E. 8

25. In the figure below, four circles of equal size lie in a circle so that each touches the larger circle and also passes through its center. The arrangement is symmetrical, with the centers of the smaller circles all on the vertices of a square. The larger circle has radius 2 units. The difference in area between the two shaded parts is:



- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{\pi}{12}$ Γ. $\frac{\pi}{18}$ Δ. $\frac{\pi}{24}$ E. 0

