

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**ΙΖ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2016**

17 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016



B' & Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

www.cms.org.cy

**ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH**

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2016**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΕΚΔΟΣΗ**



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίον 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

ΙΖ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 17/04/2016

ΔΟΚΙΜΙΟ

Β', Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα $2+3=?$

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Σωστή συμπλήρωση:

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

Λανθασμένη συμπλήρωση:

1. A B C D E

1. A B C D E

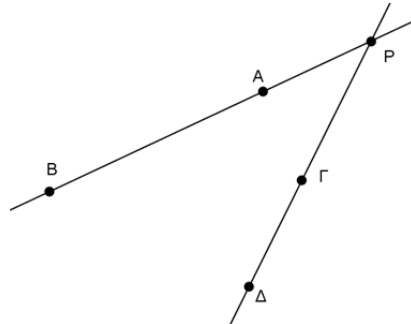
1. A B C D E

1. Ένας φοιτητής αγόρασε ένα tablet και συμφώνησε να το πληρώσει σε 20 μηνιαίες δόσεις, ως εξής:

Η πρώτη δόση να είναι €15 και κάθε επόμενη να είναι κατά €2 αυξημένη από την προηγούμενή της. Το tablet στοίχισε στο φοιτητή:

A. €650 B. €660 Γ. €680 Δ. €690 Ε. €700

2. Στο πιο κάτω σχήμα, είναι $PA = 4$, $PB = 12$, $PΓ = 5$ και τα σημεία $A, B, Γ, Δ$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Το μήκος του $PΔ$ είναι:



A. $\frac{21}{2}$ B. 8,5 Γ. $\frac{48}{5}$ Δ. $\frac{17}{2}$ Ε. Κανένα από αυτά

3. Στο σύνολο των θετικών ρητών ορίζουμε την πράξη « \wedge », ως εξής: $\alpha \wedge \beta = \beta^\alpha$. Η τιμή της παράστασης $A = [1 \wedge (2 \wedge 3)] \wedge \left(\frac{1}{2}\right)$ είναι:

A. 256 B. 512 Γ. $\frac{1}{256}$ Δ. $\frac{1}{512}$ Ε. 3

4. Η παραβολή $y = x^2 - 2\mu x + \mu + 12$, $\mu \in (0, +\infty)$ εφάπτεται στον άξονα των x ορθογώνιου συστήματος αξόνων. Το σημείο επαφής είναι:

A. (3, 0) B. (-3, 0) Γ. (-1, 0) Δ. (4, 0) Ε. (2, 0)

5. Η ακολουθία (a_n) ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_n = 2a_{n-1}, \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

με $a_1 = \sqrt{3}$. Ο όρος της a_{2016} είναι:

A. $2^{2016}\sqrt{3}$ B. $2^{2015}\sqrt{3}$ Γ. $2016\sqrt{3}$ Δ. $2016^2\sqrt{3}$ Ε. $2^{2013}\sqrt{3}$

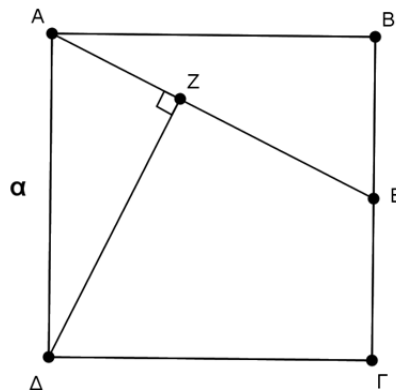
6. Το πλήθος των θετικών ακεραίων n για τους οποίους ο αριθμός

$$A = \sqrt{81 - 9n}$$

είναι θετικός ακέραιος είναι:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 8
7. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f , με $f(x) = \sin x + |\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$ είναι:
- A. -1 B. 0 Γ. 2 Δ. 1 Ε. $-\frac{1}{2}$
8. Ο Γιώργος, που οδηγεί αυτοκίνητο, τρέχει με σταθερή ταχύτητα και ο Νίκος, που οδηγεί μοτοσυκλέτα, τρέχει με τριπλάσια ταχύτητα. Ο Νίκος δίνει προβάδισμα a μέτρων στο Γιώργο και με ένα πρόσταγμα εκκίνησης ξεκινούν ταυτόχρονα προς την ίδια κατεύθυνση. Η απόσταση που θα διανύσει ο Νίκος για να φτάσει το Γιώργο είναι:

- A. $6a$ B. $4a$ Γ. $\frac{2a}{3}$ Δ. $\frac{3a}{2}$ Ε. $\frac{4a}{3}$
9. Αν $x < 0$, η παράσταση $K = \left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right|$ είναι ίση με:
- A. 1 B. $1 - 2x$ Γ. $-2x - 1$ Δ. $1 + 2x$ Ε. $2x - 1$
10. Στο πιο κάτω σχήμα, το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ είναι πλευράς a , το σημείο E είναι το μέσον της $B\Gamma$ και $\Delta Z \perp AE$. Το μήκος του AZ είναι:



- A. $\frac{a}{2}$ B. \sqrt{a} Γ. $\frac{2\sqrt{a}}{3}$ Δ. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ Ε. $\frac{a}{3}$

11. Έστω $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ με $n \in \mathbb{N}$, όπου $i^2 = -1$. Ο αριθμός $f(2016) + f(2020)$ είναι ίσος με:

- A. 0 B. $\frac{2i}{\sqrt{2}}$ Γ. i Δ. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ Ε. $-\frac{2i}{\sqrt{2}}$

12. Τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $a = 5$, $\beta = 5$, $\gamma = 5\sqrt{3}$ είναι ισεμβαδικό με ισόπλευρο τρίγωνο ΔEZ . Η πλευρά του τριγώνου ΔEZ είναι:

- A. $5\sqrt{2}$ B. $\frac{9}{2}$ Γ. $4\sqrt{3}$ Δ. $\frac{11}{2}$ Ε. 5

13. Ο διψήφιος αριθμός $\overline{a\beta}$ σε δεκαδική αναπαράσταση ($\overline{a\beta} = 10a + \beta$) είναι πρώτος και διάφορος του 13 ή του 37. Τότε το πλήθος των πρώτων διαιρετών του εξαψήφιου αριθμού $\overline{a\beta a\beta a\beta}$ σε δεκαδική αναπαράσταση είναι:

- A. 2 B. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 1

14. Οι αριθμοί a, β, γ, δ είναι θετικοί πραγματικοί, τέτοιοι ώστε ακριβώς μία από τις πιο κάτω ανισότητες να είναι ΛΑΘΟΣ:

- (i) $a < \beta$
(ii) $\gamma < \delta$
(iii) $a + \gamma < \beta + \gamma$
(iv) $a + \gamma < \beta + \delta$
(v) $a < \beta + \gamma + \delta$

Η ανισότητα που είναι ΛΑΘΟΣ είναι η:

- A. (i) B. (ii) Γ. (iii) Δ. (iv) Ε. (v)

15. Αν $g(x) = 1 - x^2$ και $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, τότε το $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ είναι ίσο με:

- A. $\frac{3}{4}$ B. 1 Γ. 3 Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ε. $\frac{7}{9}$

16. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων (x, y) της εξίσωσης $5xy = 9y + 10x - 104$ είναι:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4

17. Το άθροισμα των ψηφίων του τετραγώνου x^2 του 12 – ψηφίου αριθμού $x = 9999999999$ είναι:

- A. 108 B. 96 Γ. 100 Δ. 84 Ε. 216

18. Το πλήθος των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = e^{2x}$ και $g(x) = e^x + 6$ είναι:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4

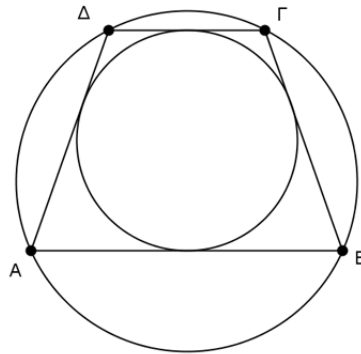
19. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{16\eta\mu^5 x + 65}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- A. $(-\infty, \infty)$ B. $[0, \infty)$ Γ. $[0, \sqrt{65}]$ Δ. $[7, 9]$ Ε. $[16, 65]$

20. Το πλήθος των ζευγών (x, y) μη αρνητικών ακεραίων που επαληθεύουν την εξίσωση $2^x + 1 = y^2$, είναι:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4

21. Στο πιο κάτω σχήμα, το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο σε κύκλο, έχει περίμετρο 25 και πλευρά $AB = 8$. Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:



- A. 25 B. $\frac{75}{2}$ Γ. 36 Δ. $25\sqrt{2}$ Ε. 33

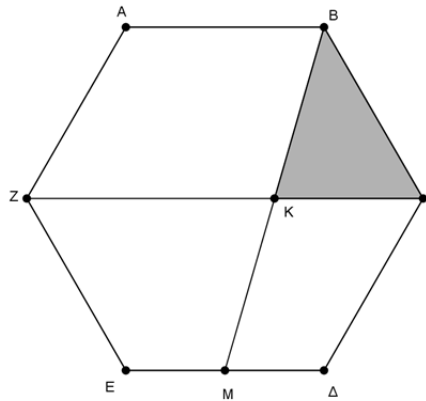
22. Για την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι: $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{\log(n+2)}{10}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_1 = \frac{\log 2}{10^2}$. Η μεγαλύτερη τιμή του n , για την οποία η ακολουθία παίρνει ελάχιστη τιμή είναι:

- A. $n = 4$ B. $n = 10^{10} - 1$ Γ. $n = 10^{10}$ Δ. $n = 10^{100}$ Ε. $n = 2 \cdot 10^{100}$

23. Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι οξυγώνιο. Το σημείο $P(\sin B - \eta\mu A, \eta\mu B - \sigma\upsilon\nu A)$ μπορεί να βρίσκεται:

- A. Μόνο στο 1^ο ή στο 2^ο τεταρτημόριο
- B. Μόνο στο 3^ο ή στο 4^ο τεταρτημόριο
- Γ. Μόνο στο 2^ο ή στο 4^ο τεταρτημόριο
- Δ. Μόνο στο 2^ο τεταρτημόριο
- Ε. Μόνο στο 3^ο τεταρτημόριο

24. Στο πιο κάτω σχήμα, το $ABΓΔΕΖ$ είναι κανονικό εξάγωνο πλευράς a και M είναι το μέσον της πλευράς του $ΔΕ$. Αν K το σημείο τομής των $BM, ZΓ$, το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου $BΚΓ$ είναι:



- A. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{16}$
- B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$
- Γ. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$
- Δ. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$
- Ε. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

25. Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$ είναι $\frac{AB}{BΓ} = 2$ και έστω K το κέντρο του. Σημειώνουμε ρ_1, ρ_2 τις ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AKB, ΓKB$, αντίστοιχα. Ο λόγος $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ είναι:

- A. $\sqrt{2} - 1$
- B. 2
- Γ. $\frac{1}{2}$
- Δ. $3 - \sqrt{5}$
- Ε. $\sqrt{5} - 2$

**CYPRUS
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
2016**

ENGLISH VERSION



CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY

36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos

Nicosia, Cyprus

Tel. 22378101, Fax: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Website: www.cms.org.cy

17th CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 17/04/2016

EXAMS PAPER

11th, 12th Grade – B', C' Lyceum

TIME: 60 minutes

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

and these are **incorrect**

1. A B C D E

1. A B C D E

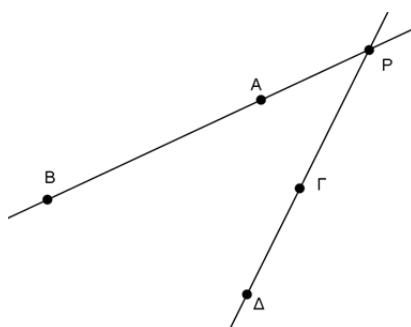
1. A B C D E

1. A student bought a tablet and he agreed to pay it in 20 monthly instalments as following:

The first instalment would be €15 and every next installment would be increased by €2 compared to the immediately previous one. The tablet cost to the student:

- A. €650 B. €660 Γ. €680 Δ. €690 E. €700

2. In the figure below, we have $PA = 4$, $PB = 12$, $P\Gamma = 5$ and the points A, B, Γ, Δ belong to the same circle. The length of $P\Delta$ is:



- A. $\frac{21}{2}$ B. 8,5 Γ. $\frac{48}{5}$ Δ. $\frac{17}{2}$ E. None of these

3. In the set of the positive rational numbers we define the operation « \wedge », by the formula: $a \wedge b = b^a$. The value of the expression $A = [1 \wedge (2 \wedge 3)] \wedge \left(\frac{1}{2}\right)$ is:

- A. 256 B. 512 Γ. $\frac{1}{256}$ Δ. $\frac{1}{512}$ E. 3

4. The parabola $y = x^2 - 2\mu x + \mu + 12$, $\mu \in (0, +\infty)$ touches the x axis in a rectangular system of axes. The point of contact is:

- A. (3, 0) B. (-3, 0) Γ. (-1, 0) Δ. (4, 0) E. (2, 0)

5. The sequence (a_v) is defined by the recurrence formula

$$a_v = 2a_{v-1}, \quad v \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

with $a_1 = \sqrt{3}$. The term a_{2016} is:

- A. $2^{2016}\sqrt{3}$ B. $2^{2015}\sqrt{3}$ Γ. $2016\sqrt{3}$ Δ. $2016^2\sqrt{3}$ E. $2^{2013}\sqrt{3}$

6. The multitude of positive integers ν for which the number

$$A = \sqrt{81 - 9\nu}$$

is a positive integer is:

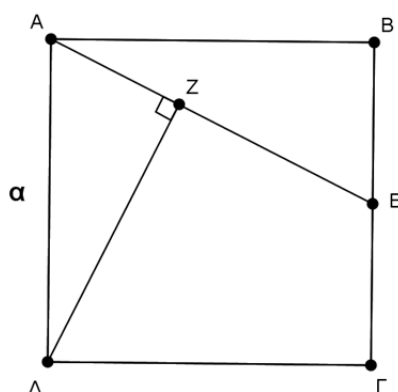
- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 E. 8
7. The least value of the function f , where $f(x) = \sigma\nu\nu x + |\sigma\nu\nu x|$, $x \in [0, 2\pi]$ is:
- A. -1 B. 0 Γ. 2 Δ. 1 E. $-\frac{1}{2}$
8. Giorgos is driving a car with a constant speed and Nikos is riding a motorcycle with a triple speed. Nikos allows an advantage of a meters to Giorgos and they start running at the same moment moving towards the same direction. The distance that Nikos has to cover in order to reach Giorgos is:

- A. $6a$ B. $4a$ Γ. $\frac{2a}{3}$ Δ. $\frac{3a}{2}$ E. $\frac{4a}{3}$

9. If $x < 0$, then the expression $K = \left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right|$ is equal to:

- A. 1 B. $1 - 2x$ Γ. $-2x - 1$ Δ. $1 + 2x$ E. $2x - 1$

10. In the figure below, the square $AB\Gamma\Delta$ has side a , the point E is the midpoint of $B\Gamma$ and $\Delta Z \perp AE$. The length of AZ is:



- A. $\frac{a}{2}$ B. \sqrt{a} Γ. $\frac{2\sqrt{a}}{3}$ Δ. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ E. $\frac{a}{3}$

11. Let $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ with $n \in \mathbb{N}$, where $i^2 = -1$. The number $f(2016) + f(2020)$ is equal to:

- A. 0 B. $\frac{2i}{\sqrt{2}}$ Γ. i Δ. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ E. $-\frac{2i}{\sqrt{2}}$

12. A triangle $AB\Gamma$ with sides $a = 5$, $\beta = 5$, $\gamma = 5\sqrt{3}$ has the same area with an equilateral triangle ΔEZ . The side of the triangle ΔEZ has length:

- A. $5\sqrt{2}$ B. $\frac{9}{2}$ Γ. $4\sqrt{3}$ Δ. $\frac{11}{2}$ E. 5

13. The two-digit number $\overline{a\beta}$ in its decimal representation ($\overline{a\beta} = 10a + \beta$) is a prime number different from 13 or 37. Then the multitude of prime divisors of the six-digit number $\overline{a\beta a\beta a\beta}$ in its decimal representation is:

- A. 2 B. 3 Γ. 4 Δ. 5 E. 1

14. The numbers a, β, γ, δ are positive real numbers, such that exactly one of the following inequalities is WRONG:

- (i) $a < \beta$
 (ii) $\gamma < \delta$
 (iii) $a + \gamma < \beta + \gamma$
 (iv) $a + \gamma < \beta + \delta$
 (v) $a < \beta + \gamma + \delta$

Then the inequality that is WRONG is:

- A. (i) B. (ii) Γ. (iii) Δ. (iv) E. (v)

15. If $g(x) = 1 - x^2$ and $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, then $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ is equal to:

- A. $\frac{3}{4}$ B. 1 Γ. 3 Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E. $\frac{7}{9}$

16. The multitude of the integral solutions (x, y) of the equation $5xy = 9y + 10x - 104$ is:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 E. 4

17. The sum of the digits of the square x^2 of the 12 – digit number $x = 999999999999$ is:

- A. 108 18. B. 96 19. Γ. 100 20. Δ. 84 21. E. 216

18. The number of points of intersection of the graphs of the functions $f(x) = e^{2x}$ and $g(x) = e^x + 6$ is:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 E. 4

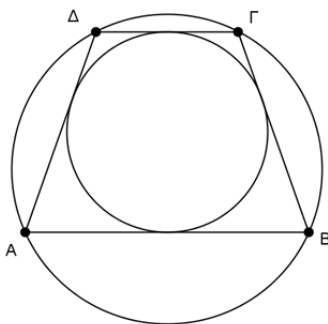
19. The range of values of the function $f(x) = \sqrt{16\eta\mu^5x + 65}$, $x \in \mathbb{R}$ is:

- A. $(-\infty, \infty)$ B. $[0, \infty)$ Γ. $[0, \sqrt{65}]$ Δ. $[7, 9]$ E. $[16, 65]$

20. The number of pairs (x, y) of non-negative integers satisfying the equation $2^x + 1 = y^2$, is:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 E. 4

21. In the figure below, the trapezium $AB\Gamma\Delta$ is inscribed in a circle and circumscribed about another one, it has perimeter of 25 units and side $AB = 8$. The area of the trapezium is:



- A. 25 B. $\frac{75}{2}$ Γ. 36 Δ. $25\sqrt{2}$ E. 33

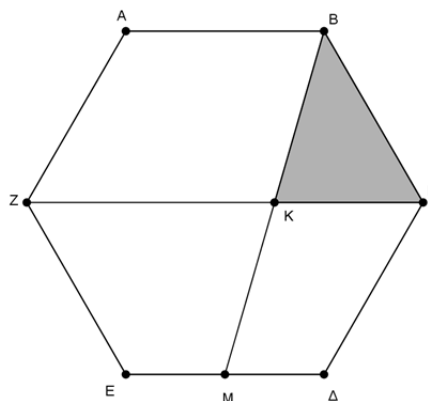
22. For the sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ we have: $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{\log(n+2)}{10}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ and $x_1 = \frac{\log 2}{10^2}$. The greatest value of n , for which the sequence takes a minimum value, is:

- A. $n = 4$ B. $n = 10^{10} - 1$ Γ. $n = 10^{10}$ Δ. $n = 10^{100}$ E. $n = 2 \cdot 10^{100}$

23. The triangle $AB\Gamma$ is acute. The point $P(\sigma\nu\nu B - \eta\mu A, \eta\mu B - \sigma\nu\nu A)$ is possible to lie:

- A. Only in the 1st or in the 2nd quadrant
- B. Only in the 3rd or in the 4th quadrant
- Γ. Only in the 2nd or in the 4th quadrant
- Δ. Only in the 2nd quadrant
- E. Only in the 3rd quadrant

24. In the figure below, $AB\Gamma\Delta EZ$ is a regular hexagon of side a and M is the midpoint of the side ΔE . If K is the point of intersection of $BM, Z\Gamma$, then the area of the shaded triangle $BK\Gamma$ is:



- A. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{16}$
- B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$
- Γ. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$
- Δ. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$
- E. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

25. In a rectangle $AB\Gamma\Delta$, we have $\frac{AB}{B\Gamma} = 2$ and let K be its centre. We denote by ρ_1, ρ_2 the radii of the inscribed circles in the triangles $AKB, \Gamma KB$, respectively. The ratio $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ is equal to:

- A. $\sqrt{2} - 1$
- B. 2
- Γ. $\frac{1}{2}$
- Δ. $3 - \sqrt{5}$
- E. $\sqrt{5} - 2$

