

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**ΙΣΤ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2015**

26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015



**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ &
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

www.cms.org.cy

**ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH**

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2015**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΕΚΔΟΣΗ**



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

ΙΣΤ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 26/04/2015

ΔΟΚΙΜΙΟ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Σωστή συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

Λανθασμένη συμπλήρωση:

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. (A) (B) (C) (D) (E)

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $AB = 6$, $B\Gamma = 8$ και $A\Gamma = 10$. Αν $\hat{\varphi} = B\hat{A}\Gamma$ και $\hat{\theta} = A\hat{\Gamma}B$, τότε η τιμή της παράστασης $\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ είναι:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{12}{25}$ Γ. $\frac{16}{25}$ Δ. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ Ε. $\frac{4}{3}$

2. Μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2015, 2015)$ ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων. Τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκονται πάνω στην ευθεία αυτή μεταξύ των A και B είναι:

A. άπειρα B. 0 Γ. 2013 Δ. 2014 Ε. 4028

3. Μια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία οι ευθείες με εξισώσεις $\kappa x + 2y = 8$ και $y = 2\kappa x - 7$ είναι κάθετες, είναι:

A. -3 B. -2 Γ. 0 Δ. 1 Ε. 2

4. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος που διαιρείται ακριβώς με κάθε ένα από τους αριθμούς 1 μέχρι και 10 είναι:

A. 210 B. 10250 Γ. 2520 Δ. 3628800 Ε. 2100

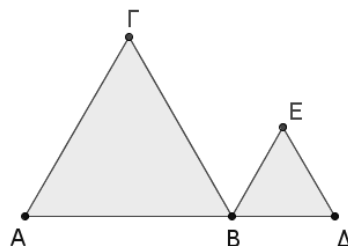
5. Το πλήθος των τιμών του φυσικού αριθμού ν , ώστε ο αριθμός $\frac{\nu-2}{\nu-6}$ να είναι ακέραιος, είναι:

A. 0 B. 1 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 6

6. Ορθογώνιο έχει εμβαδόν 12 cm^2 και περίμετρο 14 cm . Το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου είναι:

A. 4 cm B. 5 cm Γ. 6 cm Δ. $\sqrt{7} \text{ cm}$ Ε. $\sqrt{8} \text{ cm}$

7. Στο σχήμα τα σημεία A, B, Δ είναι συνευθειακά και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 2, ενώ το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 1. Το μήκος του ΓE είναι:



A. 2 B. 1,5 Γ. $\sqrt{2}$ Δ. $\sqrt{3}$ Ε. $\sqrt{5}$

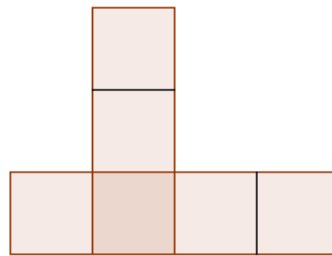
8. Δίνεται ακέραιος K με $-8 \leq K \leq -1$ και η εξίσωση $Kx^2 + (K - 2)x + K = 0$. Η πιθανότητα για την οποία η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες είναι:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ Γ. 0 Δ. $\frac{1}{8}$ Ε. $\frac{3}{8}$

9. Αν $\alpha - \beta = 4$ και $\alpha^2 - \beta^2 = 44$, τότε η τιμή της παράστασης $\alpha^3 - \beta^3$ είναι:

A. 64 B. 176 Γ. 379 Δ. 484 Ε. Καμία από τις προηγούμενες

10. Στο πιο κάτω σχήμα, φαίνονται έξι τετράγωνα πλευράς μήκους 1. Η ακτίνα του μικρότερου κύκλου στον οποίο περιέχονται όλα τα τετράγωνα είναι:



A. 2 B. $\sqrt{5}$ Γ. $\sqrt{6}$ Δ. 3 Ε. 4

11. Τρεις ενήλικες και δύο παιδιά θα καθίσουν σε ένα αυτοκίνητο 5 θέσεων. Οι θέσεις του αυτοκινήτου είναι του οδηγού, του συνοδηγού, πίσω αριστερά, πίσω δεξιά και πίσω στη μέση. Τα δύο παιδιά πρέπει να κάτσουν στις πίσω θέσεις, ενώ ο ένας ενήλικας δεν αισθάνεται καλά και δεν μπορεί να οδηγήσει. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να καθίσουν στο αυτοκίνητο οι τρεις ενήλικες και τα δύο παιδιά είναι:

A. 1 B. 5 Γ. 10 Δ. 17 Ε. 24

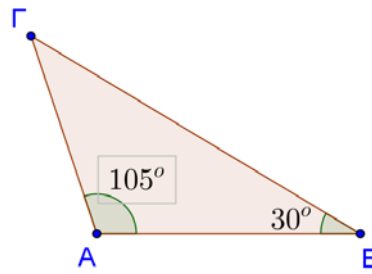
12. Δίνεται ότι $\frac{3x+y}{x-3y} = -1$. Η τιμή της παράστασης $\frac{x+3y}{3x-y}$ είναι:

A. -1 B. 1 Γ. 3 Δ. 5 Ε. 7

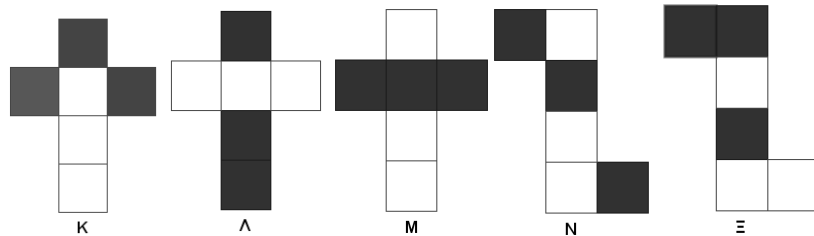
13. Οι αριθμοί 2, 2, 3, 5, 5, 8, 8, 9, α , β έχουν μέση τιμή 5 και το β είναι τριπλάσιο του α . Ο αριθμός με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι:

A. 2 B. 5 Γ. 8 Δ. 9 Ε. Καμία από τις προηγούμενες

14. Στο πιο κάτω τρίγωνο $AB\Gamma$, δίνονται $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $AB = 2$. Η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:



- A. $5 + \sqrt{3}$ B. $2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ Γ. $3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ Δ. $5 + \sqrt{2}$ Ε. $2 + 3\sqrt{3}$
15. Σε ένα αγώνα δρόμου, τρεις αθλητές διένυσαν μία απόσταση 5 km . Κάθε αθλητής έτρεξε με σταθερή ταχύτητα. Όταν έφτασε στο τέρμα ο νικητής, ήταν 1 km μπροστά από τον δεύτερο και 2 km μπροστά από τον τρίτο. Όταν τερμάτιζε ο δεύτερος βρισκόταν μπροστά από τον τρίτο:
- A. 1 km B. $\frac{3}{4} \text{ km}$ Γ. $\frac{4}{3} \text{ km}$ Δ. 2 km Ε. $\frac{5}{4} \text{ km}$
16. Δίνεται το ανάπτυγμα K , το οποίο θα διπλωθεί και θα δημιουργήσει ένα κύβο. Ο αριθμός των αναπτυγμάτων Λ, M, N και Ξ που θα δημιουργήσουν τον ίδιο κύβο με το K (με την ίδια σκίαση) όταν διπλωθούν, είναι:



- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4
17. Ένα πλοίο A βρίσκεται βόρεια ενός πλοίου B και σε απόσταση 10 km από αυτό. Το πλοίο A κινείται νοτιοανατολικά και το πλοίο B βορειοδυτικά με την ίδια ταχύτητα. Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο πλοίων είναι:

- A. 10 km B. 20 km Γ. $\sqrt{50} \text{ km}$ Δ. $\sqrt{200} \text{ km}$ Ε. $\sqrt{300} \text{ km}$
18. Η τιμή της παράστασης $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{400}\right)}$ είναι:

- A. $\frac{1}{100}$ B. $\frac{1}{10}$ Γ. $\frac{1}{20}$ Δ. $\frac{1}{40}$ Ε. $\frac{1}{50}$

19. Αν $g(x) = 1 - x^2$ και $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, τότε το $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ είναι ίσο με:

- A. $\frac{3}{4}$ B. 1 Γ. 3 Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ε. $\frac{7}{9}$

20. Δίνεται η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ για κάθε $x, y > 0$. Αν $f(40) = 10$, τότε το $f(8)$ ισούται με:

- A. 50 B. 200 Γ. 5 Δ. 2 Ε. $\frac{8}{5}$

21. Το εμβαδόν του τριγώνου $OBΓ$, όπου $O(0, 0)$, $B(3, 2)$, $Γ(1, 6)$ σημεία ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων, ισούται με:

- A. 7 B. 7,5 Γ. 8 Δ. 8,5 Ε. 9

22. Ο Ανδρέας, ο Βάσος, ο Γιώργος, ο Δημήτρης και ο Ερμής διάλεξαν από ένα διαφορετικό πρώτο αριθμό. Ο κάθε ένας έκανε την εξής δήλωση:

Ανδρέας: «Ο δικός μου πρώτος αριθμός δεν είναι ούτε ο μεγαλύτερος ούτε ο μικρότερος»

Βάσος: «Ο δικός μου πρώτος αριθμός δεν είναι ούτε ο μικρότερος ούτε ο μεγαλύτερος»

Γιώργος: «Ο δικός μου πρώτος αριθμός είναι ο μικρότερος»

Δημήτρης: «Ο δικός μου πρώτος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος»

Ερμής: «Ο δικός μου πρώτος αριθμός δεν είναι ο μεγαλύτερος»

Ακριβώς ένας από αυτούς λέει ψέματα και υπόλοιποι λένε αλήθεια. Ψέματα λέει ο:

- A. Ανδρέας
B. Βάσος
Γ. Γιώργος
Δ. Δημήτρης
Ε. Ερμής

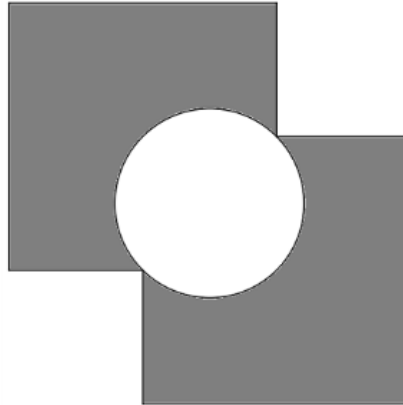
23. Ορίζουμε ότι $[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$. Η τιμή του $[[30,60,90], [1,2,3], [5,10,15]]$ είναι ίση με:

- A. 2 B. 1,5 Γ. 1 Δ. 0,5 Ε. 0

24. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ($\alpha \neq \beta$) ισχύουν $\alpha^2 = 2\beta + 15$ και $\beta^2 = 2\alpha + 15$, τότε η τιμή του $\alpha\beta$ είναι:

A. -11 B. -9 Γ. $7,5$ Δ. 15 E. 30

25. Δύο τετράγωνα πλευράς 4 τέμνονται σε δύο σημεία, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των αντίστοιχων πλευρών των τετραγώνων. Η διάμετρος του κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία τομής των δύο τετραγώνων. Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι:



A. $28 - 2\pi$ B. $32 - 2\pi$ Γ. $28 - 4\pi$ Δ. $32 - 4\pi$ E. 30

**CYPRUS
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
2015**

ENGLISH VERSION



CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY

36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos

Nicosia, Cyprus

Tel. 22378101, Fax: 22379122

Email: cms@cms.org.cy - Website: www.cms.org.cy

16th CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 26/04/2015

EXAMS PAPER

9th Grade – C' Gymnasium

10th Grade - A' Lyceum

TIME: 60 minutes

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result $2+3=?$ (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

and these are **incorrect**

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

1. In a triangle $AB\Gamma$, $AB = 6$, $B\Gamma = 8$ and $A\Gamma = 10$. If $\hat{\varphi} = B\hat{A}\Gamma$ and $\hat{\theta} = A\hat{\Gamma}B$, the value of the expression $\sin \varphi \cdot \cos \theta$ is equal to:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{12}{25}$ Γ. $\frac{16}{25}$ Δ. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ E. $\frac{4}{3}$

2. A straight line passes through the points $A(1, 1)$ and $B(2015, 2015)$ of an orthogonal axes system. The points between A and B with integer coordinates that lie on the straight line are:

A. Infinite B. 0 Γ. 2013 Δ. 2014 E. 4028

3. A value of $\kappa \in \mathbb{R}$ for which the straight line with equations $\kappa x + 2y = 8$ and $y = 2\kappa x - 7$ are perpendicular is:

A. -3 B. -2 Γ. 0 Δ. 1 E. 2

4. The smallest positive integer that is divided exactly with each one of the numbers 1 up to 10 is:

A. 210 B. 10250 Γ. 2520 Δ. 3628800 E. 2100

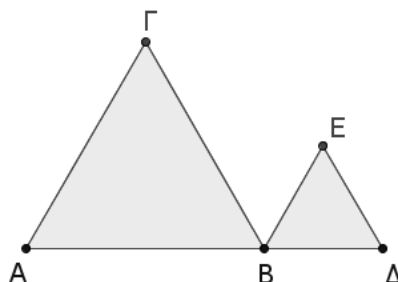
5. The number of values for the natural number ν , so that the number $\frac{\nu-2}{\nu-6}$ is an integer is:

A. 0 B. 1 Γ. 3 Δ. 4 E. 6

6. A rectangle has area 12 cm^2 and perimeter 14 cm . The length of the rectangles diagonal is:

A. 4 cm B. 5 cm Γ. 6 cm Δ. $\sqrt{7} \text{ cm}$ E. $\sqrt{8} \text{ cm}$

7. In the following figure the points A, B, Δ are collinear and the triangle $AB\Gamma$ is equilateral with side 2, while the triangle $B\Delta E$ is equilateral with side 1. The length of ΓE is:



A. 2 B. 1,5 Γ. $\sqrt{2}$ Δ. $\sqrt{3}$ E. $\sqrt{5}$

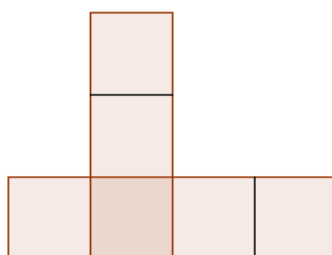
8. Given an integer K with $-8 \leq K \leq -1$ and the equation $Kx^2 + (K - 2)x + K = 0$. The probability for which the equation has two real and equal roots is:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ Γ. 0 Δ. $\frac{1}{8}$ E. $\frac{3}{8}$

9. If $\alpha - \beta = 4$ and $\alpha^2 - \beta^2 = 44$, the value of the expression $\alpha^3 - \beta^3$ is:

A. 64 B. 176 Γ. 379 Δ. 484 E. None of the previous

10. The following figure shows six squares of side with length 1. The radius of the smallest circle that contains all the squares is:



A. 2 B. $\sqrt{5}$ Γ. $\sqrt{6}$ Δ. 3 E. 4

11. Three adults and two children will sit in a car that has 5 seats. The car has the driver's seat, the passenger's seat, back left, back right and back middle seat. The two children must sit at the back seats, while one adult is not feeling well and therefore cannot drive. The number of different ways that the three adults and the two children can sit in the car is:

A. 1 B. 5 Γ. 10 Δ. 17 E. 24

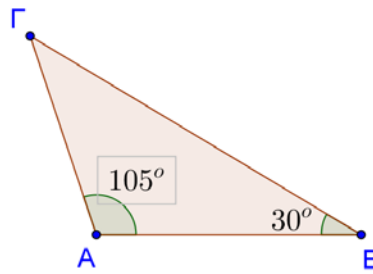
12. Given that $\frac{3x+y}{x-3y} = -1$, the value of the expression $\frac{x+3y}{3x-y}$ is:

A. -1 B. 1 Γ. 3 Δ. 5 E. 7

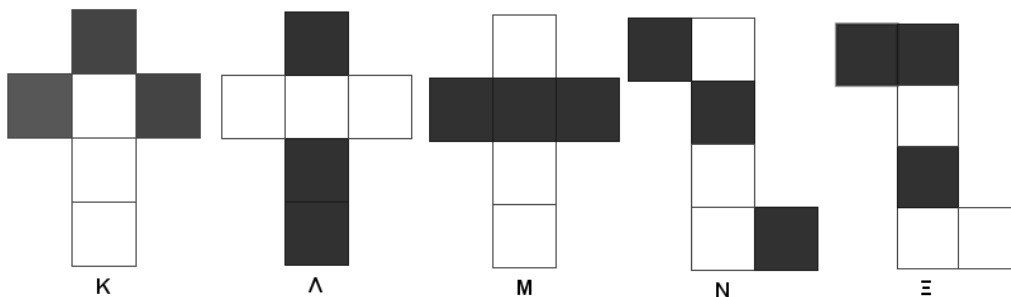
13. The mean of the numbers 2, 2, 3, 5, 5, 8, 8, 9, α , β is 5 and β is three times bigger than α . The number which has the greatest frequency is:

A. 2 B. 5 Γ. 8 Δ. 9 E. None of the previous

14. In the following figure, for triangle $AB\Gamma$ is given that $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ and $AB = 2$. The perimeter of the triangle $AB\Gamma$ is:



- A. $5 + \sqrt{3}$ B. $2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ Γ. $3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ Δ. $5 + \sqrt{2}$ E. $2 + 3\sqrt{3}$
15. In a long distance running competition, three athletes covered a distance of 5 km. Each athlete runs with constant speed. When the winner arrived at the finish line, he was 1 km ahead of the second athlete and 2 km in front of the third athlete. When the second athlete arrived at the finish line he was ahead from the third athlete:
- A. 1 km B. $\frac{3}{4}$ km Γ. $\frac{4}{3}$ km Δ. 2 km E. $\frac{5}{4}$ km
16. The net K is folded to form a cube. The number of nets from Λ, M, N and Ξ that will form the same cube with K (with the same shading) when folded is:



- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 E. 4
17. Ship A is 10 km due north from another ship B . Ship A sails Southeast and ship B sails Northwest with the same speed. The minimum distance between the two ships is:

- A. 10 km B. 20 km Γ. $\sqrt{50}$ km Δ. $\sqrt{200}$ km E. $\sqrt{300}$ km

18. The value of expression $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{400}\right)}$ is:

- A. $\frac{1}{100}$ B. $\frac{1}{10}$ Γ. $\frac{1}{20}$ Δ. $\frac{1}{40}$ E. $\frac{1}{50}$

19. If $g(x) = 1 - x^2$ and $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, then $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ equals to:

- A. $\frac{3}{4}$ B. 1 Γ. 3 Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E. $\frac{7}{9}$

20. Function f satisfies $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$, for all $x, y > 0$. If $f(40) = 10$, then $f(8)$ is equal to:

- A. 50 B. 200 Γ. 5 Δ. 2 E. $\frac{8}{5}$

21. The area of the triangle $O\Gamma\Gamma$, where $O(0,0), B(3,2), \Gamma(1,6)$ points of an orthogonal axes system, equals to:

- A. 7 B. 7,5 Γ. 8 Δ. 8,5 E. 9

22. Andreas, Vasos, George, Dimitris and Ermis each choose a different prime number. Each made the following statement:

Andreas: "My prime number is neither the largest nor the smallest"

Vasos: "My prime number is neither the largest nor the smallest"

George: "My prime number is the smallest"

Dimitris: "My prime number is the largest"

Ermis: "My prime number is not the largest"

Exactly one of them is lying and all the others tell the truth. The person who lies is:

- A. Andreas
B. Vasos
Γ. George
Δ. Dimitris
E. Ermis

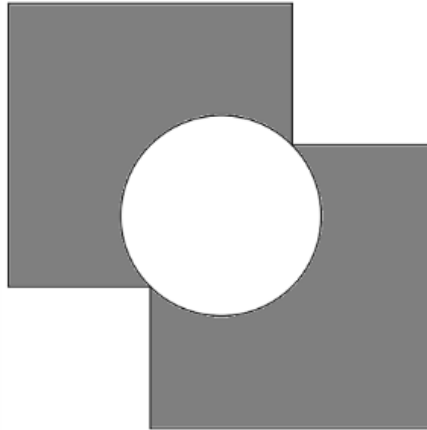
23. We define $[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ with $\gamma \neq 0$. The value of $[[30,60,90], [1,2,3], [5,10,15]]$ equals to:

- A. 2 B. 1,5 Γ. 1 Δ. 0,5 E. 0

24. For the real numbers α, β ($\alpha \neq \beta$) is true that $\alpha^2 = 2\beta + 15$ and $\beta^2 = 2\alpha + 15$. The value of $\alpha\beta$ is:

- A. -11 B. -9 Γ. $7,5$ Δ. 15 E. 30

25. Two squares of side 4 intersect at two points, as shown in the figure below. These points are the midpoints of the respective sides of squares. The diameter of the circle is the line segment joining the points of intersection of the two squares. The area of the shaded region is:



- A. $28 - 2\pi$ B. $32 - 2\pi$ Γ. $28 - 4\pi$ Δ. $32 - 4\pi$ E. 30

