ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΙΣΤ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2015

26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015

Β΄ & Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

www.cms.org.cy

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ **ΕΛΛΗΝΙΚΑ** ΚΑΙ **ΑΓΓΛΙΚΑ**
PAPERS IN BOTH **GREEK** AND **ENGLISH**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
Email: cms@cms.org.cy - Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

ΙΣΤ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 26/04/2015

ΔΟΚΙΜΙΟ
Β΄, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων:

1. Βρείτε το αποτέλεσμα 2+3=? (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Σωστή συμπλήρωση:

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

Λανθασμένη συμπλήρωση:

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

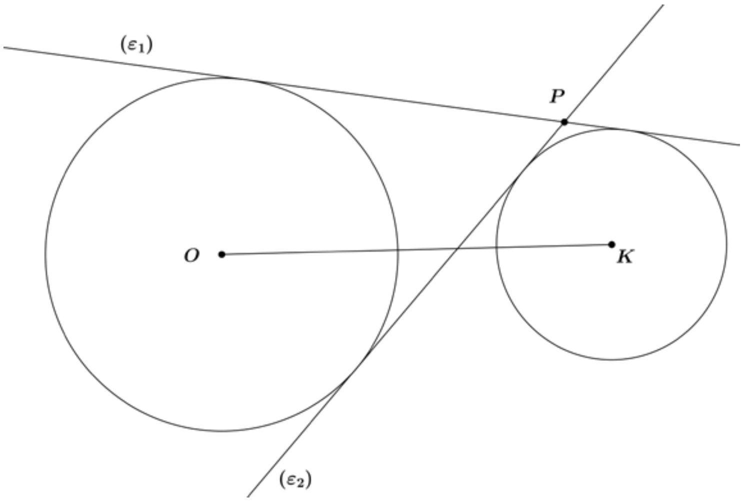
1. Αν $f(x) = 3x - 16, x \in \mathbb{R}$, τότε $f^{-1}(f^{-1}(-1))$ είναι ίσο με:

   Α. 36 Β. 5 Γ. 7 Δ. $\frac{20}{3}$ Ε. -19

2. Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sqrt{14 - 2yz}$, $y = \sqrt{18 - 2xz}$ και $z = \sqrt{17 - 2xy}$. Η αριθμητική τιμή της παράστασης $x + y + z$ ισούται με:

   Α. 5 Β. 6 Γ. $\frac{13}{2}$ Δ. 7 Ε. 8

3. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται δύο κύκλοι (O, R) και (K, r) με $OK = \frac{15}{2}\ cm$. Οι (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι μια εξωτερική και μια εσωτερική εφαπτομένη αντίστοιχα των δύο κύκλων. Έστω P το σημείο τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2). Τότε η ακτίνα του κύκλου (c) , που περνά από τα σημεία O, K και P , είναι ίση με:



   Α. $\frac{15}{4}\ cm$ Β. $7{,}5\ cm$ Γ. $5\ cm$ Δ. $\frac{15}{8}\ cm$ Ε. Καμία από τις προηγούμενες

4. Αν x, y ακέραιοι τέτοιοι ώστε $3x + 7y = 1$, ποια είναι η ελάχιστη θετική τιμή της παράστασης $x + y$;

   Α. 1 Β. 3 Γ. 4 Δ. 7 Ε. 5

5. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή στο κλάσμα $A = \frac{7 \cdot 10^{2014} - 1}{4 \cdot 10^{2015} - 1}$;

   Α. 2 Β. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6

6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι ευθεία και ισχύει:

$$f(2012) \leq f(2013), f(2014) \geq f(2015) \text{ και } f(2015) = 2015$$

Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

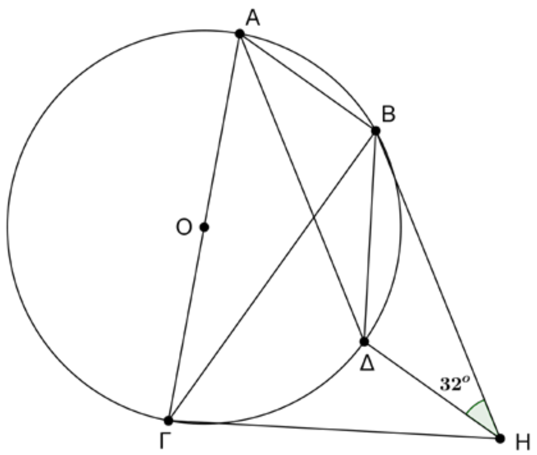
Α. $f(0) = 0$ Β. $f(0) < 2015$ Γ. $f(2012) < f(0) < f(-2012)$

Δ. $f(0) > 2015$ Ε. $f(0) = 2015$

7. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 1 + |x|$ ισούται με:

Α. 0 Β. 1 Γ. 2 Δ. -2 Ε. -1

8. Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο $ΑΓ$, $Δ$ το μέσο του τόξου $ΒΓ$ και $ΑΒΗΔ$ παραλληλόγραμμο. Αν $\widehat{ΒΗΔ} = 32°$, τότε το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΒΓΗ}$ ισούται με:



Α. $52°$ Β. $56°$ Γ. $58°$ Δ. $60°$ Ε. $64°$

9. Το πλήθος των θετικών ακεραίων αριθμών ν, για τους οποίους ισχύει «ο αριθμός $\nu + 1$ διαιρεί τον $\nu^2 + 1$» είναι:

Α. 2 Β. 1 Γ. 5 Δ. 10 Ε. 4

10. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(xy), \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ και $f(5) = 5$. Να υπολογίσετε την τιμή του $f(25)$.

Α. 1 Β. 25 Γ. 5 Δ. 10 Ε. Καμία από τις προηγούμενες

11. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Μεταξύ των γωνιών του $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$6\,\sigma\upsilon\nu A + 2\,\sigma\upsilon\nu B = 7$$

$$6\,\eta\mu A - 2\,\eta\mu B = \sqrt{3}$$

Το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ σε μοίρες ισούται με:

Α. $120°$ Β. $150°$ Γ. $90°$ Δ. $30°$ Ε. $60°$

12. Ορθός κύλινδρος έχει όγκο $24\ cm^3$. Η κυρτή του επιφάνεια είναι E_κ και η ακτίνα του R. Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις είναι ορθή;

Α. Η E_κ είναι ελάχιστη για $R = \sqrt{2}\ cm$

Β. Η E_κ είναι ελάχιστη για $R = 2\ cm$

Γ. Η E_κ είναι ελάχιστη για $R = 3\ cm$

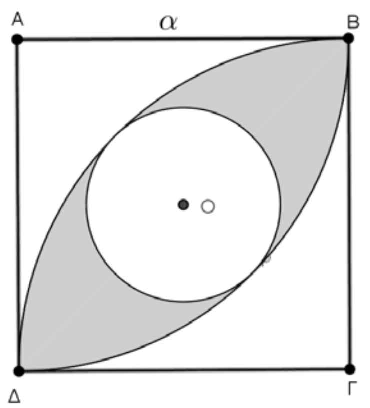
Δ. Η E_κ είναι ελάχιστη για $R = \sqrt{6}\ cm$

Ε. Δεν υπάρχει ελάχιστη για την E_κ

13. Αν $xy = 3, yz = 2$ και $zx = 24$, τότε η τιμή της $x^2 + y^2 + z^2$ είναι ίση με:

Α. $52\frac{1}{4}$ Β. $22\frac{1}{4}$ Γ. 53 Δ. $22\frac{1}{2}$ Ε. Καμία από τις προηγούμενες

14. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς α και με κέντρο O. Με κέντρα τις κορυφές A και Γ του τετράγωνου και ακτίνα α φέρουμε εντός του τετραγώνου τα τόξα $Β\Delta$ αντίστοιχα και κύκλο με κέντρο O, ο οποίος εφάπτεται των δύο τόξων. Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους ισούται με:



Α. $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ Β. $a^2\left(\pi\sqrt{2} - \pi - 1\right)$ Γ. $\frac{\pi a^2}{2} - 1$

Δ. $a^2\left(\pi\sqrt{2} + \pi - 1\right)$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

15. Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει ένα κυκλικό μέρος για να τοποθετήσει τα γεωργικά του μηχανήματα. Για να υπολογίσει το εμβαδόν του κυκλικού μέρους, ο γεωργός έκανε 480 βήματα για να διανύσει την περίμετρο του κυκλικού μέρους. Αν 120 βήματα του γεωργού ισοδυναμούν με $100\ m$, το εμβαδόν του κυκλικού μέρους σε m^2 ισούται περίπου με:

Α. 240^2 Β. $\frac{480^2}{\pi}$ Γ. $\frac{120^2}{\pi}$ Δ. $\frac{200^2}{\pi}$ Ε. $\frac{201^2}{\pi}$

16. Ο μέσος όρος 2κ πραγματικών αριθμών είναι 2κ. Ο μέσος όρος λ από αυτούς τους 2κ αριθμούς είναι λ $(\lambda < 2\kappa)$. Ο μέσος όρος των υπολοίπων $2\kappa - \lambda$ αριθμών είναι:

Α. κ Β. λ Γ. $2\kappa - \lambda$ Δ. $2\kappa + \lambda$ Ε. Κανένας από τους προηγούμενους

17. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 - 4\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = 45$$

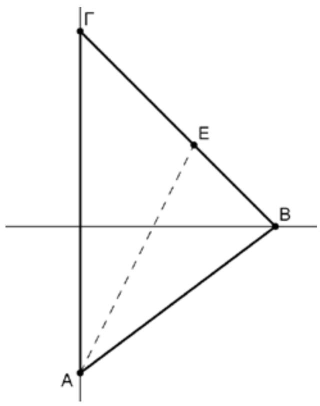
ισούται με:

Α. 4 Β. 3 Γ. 2 Δ. 1 Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

18. Δίνεται ο αριθμός N, για τον οποίο ισχύει $log_3(log_5(log_7 N)) = 13$. Το πλήθος των πρώτων διαιρετών του N ισούται με:

Α. 2 Β. 1 Γ. 3 Δ. 7 Ε. 5

19. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(0,-3)$, $B(4,0)$, $\Gamma(0,4)$. Αν AE είναι η διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$, οι συντεταγμένες του σημείου E είναι:



Α. $(2,2)$ Β. $\left(\frac{7}{3},2\right)$ Γ. $\left(2,\frac{5}{3}\right)$ Δ. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ Ε. $\left(\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right)$

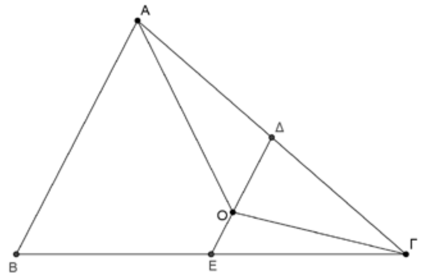
20. Αν x, y είναι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει $\frac{x}{y}+\frac{x+8y}{y+8x}=2$, η τιμή του αριθμού $\frac{x}{y}$ ισούται με:

Α. $0{,}55$ Β. $0{,}6$ Γ. $0{,}65$ Δ. $0{,}70$ Ε. $0{,}75$

21. Ένα τρίγωνο έχει ύψη με μήκη που είναι ακέραιοι αριθμοί. Τα δύο από αυτά τα ύψη είναι 7 και 12. Η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το τρίτο ύψος είναι αντίστοιχα:

Α. 4 και 7 Β. 5 και 16 Γ. 5 και 17 Δ. 4 και 16 Ε. Καμία από τις προηγούμενες

22. Στο παρακάτω σχήμα, Δ είναι το μέσο του $ΑΓ$, $Ε$ το μέσο του $ΒΓ$ και $(ΟΔ) = 2(ΟΕ)$. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΟΓ)}$ είναι ίσος με:



Α. $\frac{3}{2}$ Β. 3 Γ. 2 Δ. $\frac{5}{3}$ Ε. Κανένας από τους προηγούμενους

23. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $A = 323^{700}$ με το 10 είναι:

Α. 8 Β. 5 Γ. 3 Δ. 2 Ε. 1

24. Από τα ακόλουθα συστήματα ανισώσεων,

(i) $2x < 4 < x^2$ (ii) $2x < x^2 < 4$ (iii) $x^2 < 2x < 4$

(iv) $x^2 < 4 < 2x$ (v) $4 < x^2 < 2x$

να βρείτε ποιο δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Α. (i) Β. (ii) Γ. (iii) Δ. (iv) Ε. (v)

25. Ορίζεται ως $\nu!$ το γινόμενο $\nu! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot \nu$.
Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος $1!+2!+3!+\cdots+11!$ με τον αριθμό 12 ισούται με:

Α. 11 Β. 9 Γ. 8 Δ. 7 Ε. 6

CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD 2015

ENGLISH VERSION

CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY
36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos
Nicosia, Cyprus
Tel. 22378101, Fax: 22379122
Email: cms@cms.org.cy -Website: www.cms.org.cy

16th CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, 26/04/2015

EXAMS PAPER
11th, 12th Grade – B΄, C΄ Lyceum

TIME: 60 minutes

- Fill carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every right answer is graded with 4 points. For each wrong answer 1 point will be lost.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be electronically, so any mark will be taken wrong.
- You can use the space next to the questions to make extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, with your final answer.

Choose only one of the five proposed answers (A, B, C, D or E) and fill the box for right answer.

Example of filling the table of answers:

41. Find the result 2+3=? (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

These fillings are **correct** and these are **incorrect**

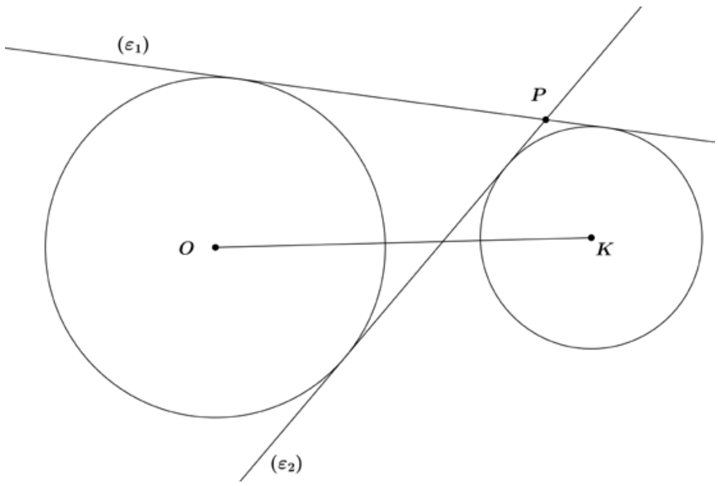
1. If $f(x) = 3x - 16, x \in \mathbb{R}$, then $f^{-1}(f^{-1}(-1))$ is equal to:

   A. 36 B. 5 Γ. 7 Δ. $\frac{20}{3}$ Ε. -19

2. If $x, y, z \in \mathbb{R}$ such that $x = \sqrt{14 - 2yz}$, $y = \sqrt{18 - 2xz}$ and $z = \sqrt{17 - 2xy}$, the arithmetic value of the expression $x + y + z$ is equal to:

   A. 5 B. 6 Γ. $\frac{13}{2}$ Δ. 7 Ε. 8

3. In the figure below, we have two circles (O, R) and (K, r) with $OK = \frac{15}{2}\ cm$ and an external and an internal tangent (ϵ_1) and (ϵ_2) respectively. Let P be the point of intersection of (ϵ_1) and (ϵ_2). Then the radius of the circle (c) which passes through the points O, K and P is equal to:



   A. $\frac{15}{4}\ cm$ B. $7{,}5\ cm$ Γ. $5\ cm$ Δ. $\frac{15}{8}\ cm$ Ε. None of these

4. If x, y are integers such that $3x + 7y = 1$, what is the least positive value of the expression $x + y$?

   A. 1 B. 3 Γ. 4 Δ. 7 Ε. 5

5. Which of the following numbers is a common divisor of the numerator and the denominator in the fraction $A = \frac{7 \cdot 10^{2014} - 1}{4 \cdot 10^{2015} - 1}$?

   A. 2 B. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6

6. The graph of the function f is a straight line and it is true that:

$$f(2012) \leq f(2013),\ f(2014) \geq f(2015) \text{ and } f(2015) = 2015$$

Which of the following relations is true?

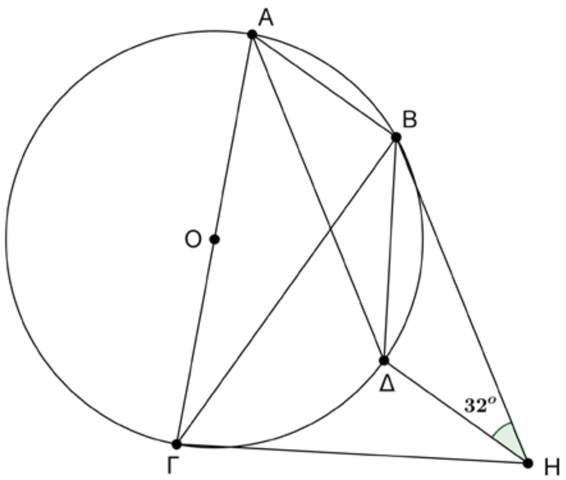
A. $f(0) = 0$ B. $f(0) < 2015$ Γ. $f(2012) < f(0) < f(-2012)$

Δ. $f(0) > 2015$ E. $f(0) = 2015$

7. The minimum value of the function $f(x) = x^2 - 1 + |x|$ is equal to:

A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. -2 E. -1

8. In the figure below, the triangle $AB\Gamma$ is inscribed in a circle with diameter $A\Gamma$, Δ is the midpoint of the arc $B\Gamma$ and $ABH\Delta$ is a parallelogram. If $\widehat{BH\Delta} = 32°$, the angle $\widehat{B\Gamma H}$ is equal to:



A. $52°$ B. $56°$ Γ. $58°$ Δ. $60°$ E. $64°$

9. The number of positive integers ν for which it is true that "the number $\nu + 1$ divides the number $\nu^2 + 1$" is equal to:

A. 2 B. 1 Γ. 5 Δ. 10 E. 4

10. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function for which $f(x+y) = f(xy)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ and $f(5) = 5$. Calculate the value of $f(25)$.

A. 1 B. 25 Γ. 5 Δ. 10 E. None of these

11. Let a triangle $AB\Gamma$. The following relations are true between its angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$:

$$6\,cosA + 2\,cosB = 7$$

$$6\,sinA - 2\,sinB = \sqrt{3}$$

The measure of the angle $\hat{\Gamma}$ in degrees is equal to:

Α. $120°$ Β. $150°$ Γ. $90°$ Δ. $30°$ Ε. $60°$

12. A right cylinder has volume $24\ cm^3$. Its curved surface is E_κ and its radius is R. Which of the following statements is true:

Α. E_κ is minimum when $R = \sqrt{2}\ cm$

Β. E_κ is minimum when $R = 2\ cm$

Γ. E_κ is minimum when $R = 3\ cm$

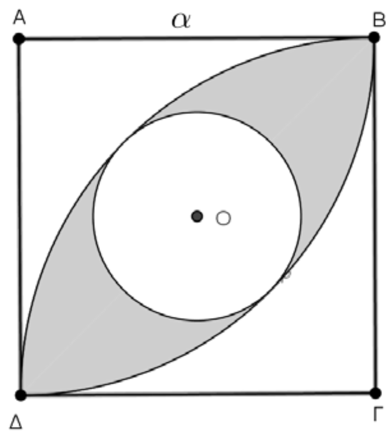
Δ. E_κ is minimum when $R = \sqrt{6}\ cm$

Ε. There is no minimum value for E_κ

13. If $xy = 3$, $yz = 2$ and $zx = 24$, the value of $x^2 + y^2 + z^2$ is equal to:

Α. $52\frac{1}{4}$ Β. $22\frac{1}{4}$ Γ. 53 Δ. $22\frac{1}{2}$ Ε. None of these

14. In the figure below, we have a square $AB\Gamma\Delta$ of side α and with centre O. With centres the vertices A and Γ of the square and with radius α we draw, inside the square, the arcs $B\Delta$ respectively and a circle with centre O, such that it touches the two arcs. The area of the shaded region is equal to:



Α. $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ Β. $a^2(\pi\sqrt{2} - \pi - 1)$ Γ. $\frac{\pi a^2}{2} - 1$

Δ. $a^2(\pi\sqrt{2} + \pi - 1)$ Ε. None of these

15. A farmer wants to construct a circular fence so that he keeps his agricultural tools. In order to calculate the area of the circular region the farmer walked 480 steps so that he covered the perimeter of the circle. Given that 120 steps of the farmer correspond to 100 m, the area of the circular region, in m^2, is approximately equal to:

A. 240^2 B. $\frac{480^2}{\pi}$ Γ. $\frac{120^2}{\pi}$ Δ. $\frac{200^2}{\pi}$ E. $\frac{201^2}{\pi}$

16. The average of 2κ real numbers is 2κ. The average of λ of these 2κ numbers is $(\lambda < 2\kappa)$. The average of the rest $2\kappa - \lambda$ numbers is equal to:

A. κ B. λ Γ. $2\kappa - \lambda$ Δ. $2\kappa + \lambda$ E. None of these

17. How many of the roots of the following equation are integers?

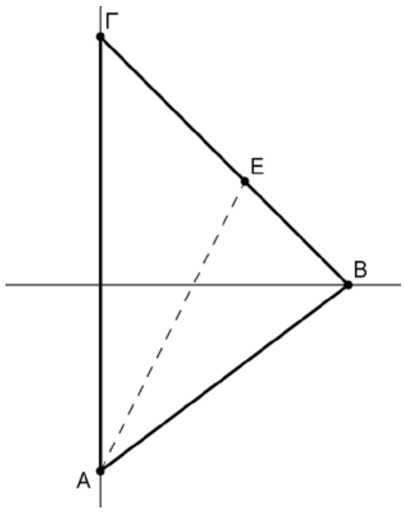
$$\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 - 4\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = 45$$

A. 4 B. 3 Γ. 2 Δ. 1 E. None of these

18. How many are the prime divisors of the number N for which we have $log_3(log_5(log_7 N)) = 13$?

A. 2 B. 1 Γ. 3 Δ. 7 E. 5

19. In the figure below, we have a triangle with vertices $A(0,-3)$, $B(4,0)$, $\Gamma(0,4)$. If AE is the bisector of the angle $BA\Gamma$, the coordinates of the point E are:



A. $(2,2)$ B. $\left(\frac{7}{3},2\right)$ Γ. $\left(2,\frac{5}{3}\right)$ Δ. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ E. $\left(\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right)$

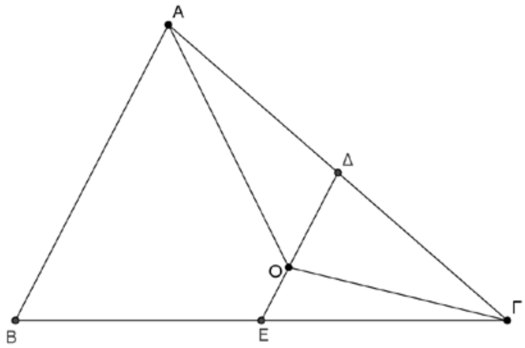
20. If x, y are distinct real numbers such that $\frac{x}{y} + \frac{x+8y}{y+8x} = 2$, the value of $\frac{x}{y}$ is equal to:

Α. $0{,}55$ Β. $0{,}6$ Γ. $0{,}65$ Δ. $0{,}70$ Ε. $0{,}75$

21. A triangle has altitudes with measures that are integer numbers. Two of these altitudes have lengths 7 and 12 units. The minimum and maximum value of the third altitude are respectively:

Α. 4 and 7 Β. 5 and 16 Γ. 5 and 17 Δ. 4 and 16 Ε. None of these

22. In the figure below, Δ is the midpoint of $A\Gamma$, E the midpoint of $B\Gamma$ and $(O\Delta) = 2(OE)$. The ratio of the areas of the triangles $\frac{(AB\Gamma)}{(AO\Gamma)}$ is equal to:



Α. $\frac{3}{2}$ Β. 3 Γ. 2 Δ. $\frac{5}{3}$ Ε. None of these

23. The remainder of the division of $A = 323^{700}$ by 10 is equal to:

Α. 8 Β. 5 Γ. 3 Δ. 2 Ε. 1

24. Among the following systems of inequalities,

(i) $2x < 4 < x^2$ (ii) $2x < x^2 < 4$ (iii) $x^2 < 2x < 4$

(iv) $x^2 < 4 < 2x$ (v) $4 < x^2 < 2x$

find which has no real solutions.

Α. (i) Β. (ii) Γ. (iii) Δ. (iv) Ε. (v)

25. We define as $\nu!$ the product $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu$.

The remainder obtained when $1! + 2! + 3! + \cdots + 11!$ is divided by 12 is equal to:

Α. 11 Β. 9 Γ. 8 Δ. 7 Ε. 6